

第2章

テンソル積

前章で我々は Hom の左完全性（定理 1.27）の証明から、左完全性を反映した部分と $\text{Hom}(M, -)$ の性質を反映した部分という異なる 2 種類の部品を補題の形で独立させたが、 $\text{Ker } f_{2*}$ の包含写像 ι についての等式 $f_{2*} \circ \iota = 0$ から $\iota = f_{1*} \circ Q$ をみたす写像 Q の存在を導出する部分についてはそれを果たせなかった。そのために、前章で与えたごく自然な^{*1}証明を、テンソル積を用いたまったく不自然な証明に書き換える。

書き換え後のその部分は、大きく分けて 3 つのステップからなる。すなわち、 $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_2)$ への準同型写像の等式 $f_{2*} \circ \iota = 0$ をテンソル積 $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_2 への準同型写像の等式に変形するステップ 1、その等式 $f_2 \circ \iota^\flat = 0$ から $f_1 \circ P = \iota$ をみたす $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_0 への準同型写像 P の存在を導くステップ 2、そして、書き換え前がそうであったように、 $\iota = f_{1*} \circ Q$ をみたす $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への写像 Q の存在で終わるように整合させるステップ 3 である。

それらを述べる前に、ジョイント節から引き続いて、定理 1.27 の証明から離れた一般論を述べることにしよう。2 つの加群のテンソル積を定義することから始めるのである。

2.1 加群のテンソル積

前章からこの章へのジョイント節ではいくつかの概念を定義した：

- 集合 I によって**自由に生成される加群** $R\langle I \rangle$ （と、その元が I の元の形式的な線形結合の形で書かれること），
- 加群 U の部分集合 U' によって**生成される加群** と呼ばれる、 U' を包含する部分加群 RU' ，
- 加群 U の部分加群 S による**商加群** U/S ，
- **射影** と呼ばれる U から U/S への、 S のすべての元を 0 に写す準同型写像.

これらによって、加群のテンソル積を定義する準備は既に整っている。

^{*1} のちの第 3 章で説明されるように、この単語は圏論の用語として定義される。そのような用語と日常感覚で用いられるものが混同されてしまうから、厳密な区別が必要である。ここでは日常感覚で書いた。

定義 2.1. 2つの加群 W, X に対して、これらの（单なる集合としての）直積 $W \times X$ によって自由に生成された加群 $R\langle W \times X \rangle$ を考え、その部分集合

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle w + w', x \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w', x \rangle, \langle r w, x \rangle - \langle w, r x \rangle, \\ \langle w, x + x' \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w, x' \rangle, \langle w, r x \rangle - r \langle w, x \rangle \end{array} \mid r \in R; w, w' \in W; x, x' \in X \right\}$$

によって生成される部分加群による商加群を $W \otimes X$ と書いて、 W と X の**テンソル積**と呼ぶ^{*2}。言い換えれば、前述の部分集合によって生成される部分加群を $B(W, X)$ と書くとき、 $R\langle W \times X \rangle / B(W, X)$ がテンソル積 $W \otimes X$ である。

$W \otimes X$ の重要な性質が、以下に再掲する2つの補題を用いて証明される。補題 1.42 は $W \times X$ を I として、補題 1.54 は $R\langle W \times X \rangle$ を U とし先述の部分集合を U' として、それぞれ適用される。

補題 1.42 (再掲)

I は集合、 Y は加群とする。 I から Y への任意の写像 b について、 $R\langle I \rangle$ から Y へのある準同型写像 A で、 I の任意の元 j について $A(1j) = b(j)$ をみたすものが一意的に存在する。

補題 1.54 (再掲)

U を加群、 U' をその部分集合とし、 U から商加群 U/RU' への射影を q と書く。また、 Y を加群とする。 U から Y への準同型写像 g が U' の任意の元を 0 に写すならば、 U/RU' から Y への準同型写像 ρ で $\rho \circ q = g$ をみたすものが一意的に存在する。

補題 1.42 は $W \times X$ から Y への写像 b から $R\langle W \times X \rangle$ から Y への準同型写像 A を定め、補題 1.54 は $R\langle W \times X \rangle$ から Y への準同型写像 g から (g が U' のすべての元を 0 に写すならば) $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ を定めるだろう。そして、もしも b が適切な条件をみたしていれば、 A はそれに応じて何らかの性質をみたす。その性質が A が U' のすべての元を 0 に写すものならば、補題 1.54 を適用する際に $A = g$ ができるだろう。実際のところ、4つの条件をみたす $W \times X$ から Y への写像 b について、そのようにして $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ を定める。

注意. この稿では、直積 $W \times X$ の元 $\langle w, x \rangle$ を代入する際に、代入を表す括弧を省略して $f\langle w, x \rangle$ のように書く^{*3}。

補題 2.2

W, X, Y を加群とし、 $R\langle W \times X \rangle$ から $W \otimes X$ への射影を q とする。 $W \times X$ から Y への写像 b が

- W の任意の元 w, w' と X の任意の元 x について、 $b\langle w + w', x \rangle = b\langle w, x \rangle + b\langle w', x \rangle$,
- W の任意の元 w と X の任意の元 x と任意の係数 r について、 $b\langle r w, x \rangle = b\langle w, r x \rangle$,
- W の任意の元 w と X の任意の元 x, x' について、 $b\langle w, x + x' \rangle = b\langle w, x \rangle + b\langle w, x' \rangle$,

^{*2} テンソル積の定義にはいくつかの方法があり、この自由生成加群とは少し異なる加群を用いることもある（そちらが多数派かもしれない）。そのような定義との間の整合性についても、付録（あとで書きます）を参照。

^{*3} 最初は全ての括弧を書いていたが、出力された数式を実際に見てみたら想定していたよりもずっと鬱陶しく感じられたので、省略することにした。

- W の任意の元 w と X の任意の元 x と任意の係数 r について, $b\langle w, rx \rangle = r b\langle w, x \rangle$

のすべてをみたすならば, $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ で W の任意の元 w と X の任意の元 x について $(\rho \circ q)(1\langle w, x \rangle) = b\langle w, x \rangle$ をみたすものが一意的に存在する.

証明. b が上記の 4 つの条件すべてをみたしていると仮定する. 補題 1.42 によって, $R\langle W \times X \rangle$ から Y へのある準同型写像 g で $g(1\langle w, x \rangle) = b\langle w, x \rangle$ をみたすものが存在する. この g は $\langle w + w', x \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w', x \rangle$ における値が 0 である. というのは,

$$\begin{aligned} g(\langle w + w', x \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w', x \rangle) &= g(1\langle w + w', x \rangle) - g(1\langle w, x \rangle) - g(1\langle w', x \rangle) \\ &= b\langle w + w', x \rangle - b\langle w, x \rangle - b\langle w', x \rangle \end{aligned}$$

の右辺が, b に仮定された 4 条件のうち最初のものによって 0 だからである. 同様に, $\langle r w, x \rangle - \langle w, r x \rangle$, $\langle w, x + x' \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w, x' \rangle$, $\langle w, r x \rangle - r\langle w, x \rangle$ における g の値は, それに応じた条件を用いて 0 であることが確かめられる. 補題 1.54 の適用によって, $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ で $\rho \circ q = g$ をみたすものが得られる. g の定め方から, W の任意の元 w と X の任意の元 x について $(\rho \circ q)(1\langle w, x \rangle) = b\langle w, x \rangle$.

一意性を示すために, $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ が条件をみたすと仮定する. 補題 1.42 によって, $\rho \circ q$ の一意性がわかる. そして, 上で g について述べたのとまったく同じようにして, $\rho \circ q$ が補題 1.54 の条件をみたしていることがわかり, ρ は一意である. \square

$W \times X$ から Y への写像は, 4 つの条件をみたすならば, このように $W \otimes X$ から Y への準同型写像を定める. 次節では, これを少し違った視点から見直そう.

2.2 解釈し直す

前節の補題 2.2 の証明では, $W \times X$ から Y への, 4 つの条件をみたす写像 b から $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ を得るために, $R\langle W \times X \rangle$ から Y への準同型写像 g をその仲立ちとして, b から g を得るのには補題 1.42 を, g から ρ を得るのには補題 1.54 を用いた. 2 つの補題はその際には単にそのような準同型写像を得るための道具に過ぎなかったが, この節ではそれらを解釈し直して, その結果として補題 2.2 に新たな解釈を与える.

補題 1.54 は, U' 上での値が 0 である準同型写像 g について, $\rho \circ q$ が g に等しい準同型写像 ρ が一意的に存在すると述べていたのだった. これについて考え直すために, 簡単な補題を示す.

補題 2.3

U を加群, U' をその部分集合とし, U から商加群 U/RU' への射影を q と書く. また, Y を加群とする. U/RU' から Y への任意の準同型写像 ρ について, $\rho \circ q$ は U から Y への準同型写像であり, U' のすべての元を 0 に写す.

証明. q と ρ はそれぞれ, U から U/RU' へと U/RU' から Y への準同型写像であるから, それらの合成 $\rho \circ q$ は U から Y への準同型写像である. 補題 1.51 により RU' のすべての元は射

影 q で U/RU' のゼロ元に写される。 U' は RU' に包含されているので、その元はどれも q で 0 に写される。 ρ は準同型写像なので、それらを Y のゼロ元へと写す。□

射影 q を右から合成すること、すなわち、 U/RU' から Y への準同型写像 ρ を U からの準同型写像 $\rho \circ q$ に写す写像を非公式に $- \circ q$ と書こう⁴。上の補題は、どの ρ についても、それを $- \circ q$ で写した $\rho \circ q$ は、 U' のすべての元を 0 に写すと述べている。他方、補題 1.54 は U' のすべての元を 0 に写す U から Y への準同型写像 g について、どの g にもちょうど 1 つ、この $- \circ q$ で写して g になるような ρ が存在すると述べている。これらを合わせれば、補題 1.54 は $- \circ q$ の逆写像の存在を示していると解釈できる。

補題 1.42 にも同じことをしたい。 $- \circ q$ に相当する写像のために記号 $\widehat{}$ を定義しよう。

定義 2.4. I は集合、 Y は加群とする。 $R\langle I \rangle$ から Y への準同型写像 A と I の任意の元 j に対して、 $A(1j)$ を $\widehat{A}(j)$ と書く。すなわち、

$$\widehat{A}(j) = A(1j).$$

補題 1.42 は、その主張に先程の補題 1.54 にあった「 U' の任意の元を 0 に写す」に相当するものを含まない分だけ単純であるので、補題 2.3 に相当する補題は不要である。写像 $\widehat{}$ は $R\langle I \rangle$ から Y への準同型写像 A を I から Y への写像 \widehat{A} に写す。その一方で補題 1.42 は I から Y へのどの写像 b についてもちょうど 1 つずつ、 \widehat{A} が b に等しい A が存在すると述べている。これらを合わせれば、補題 1.42 は $\widehat{}$ の逆写像の存在を示していると解釈できる。

前節までは裏に隠れていた 2 つの写像を以上に見たように記号 $- \circ q$ と $\widehat{}$ で書いて表すとき、それらをまとめて、 $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ を $W \times X$ から Y への写像 $\widehat{\rho \circ q}$ に写す写像 $\widehat{- \circ q}$ ができる。それらと逆の補題 1.42 と 1.54 をまとめたものが、前節の補題 2.2 なのだった。以上のすべてを 1 つの補題として述べよう。

補題 2.5

W, X, Y を加群とし、 $R\langle W \times X \rangle$ から $W \otimes X$ への射影を q とする。

- (i) $W \otimes X$ から Y への任意の準同型写像 ρ について、 $W \times X$ から Y への写像 $\widehat{\rho \circ q}$ を b とおくと、 b は以下をすべてみたす：
 - W の任意の元 w, w' と X の任意の元 x について、 $b\langle w + w', x \rangle = b\langle w, x \rangle + b\langle w', x \rangle$,
 - W の任意の元 w と X の任意の元 x と任意の係数 r について、 $b\langle rw, x \rangle = b\langle w, rx \rangle$,
 - W の任意の元 w と X の任意の元 x, x' について、 $b\langle w, x + x' \rangle = b\langle w, x \rangle + b\langle w, x' \rangle$,
 - W の任意の元 w と X の任意の元 x と任意の係数 r について、 $b\langle w, rx \rangle = r b\langle w, x \rangle$.
- (ii) $W \times X$ から Y への写像 b が (i) に記した 4 つの条件をすべてみたすならば、その b について、 $W \otimes X$ から Y への準同型写像 ρ で $\widehat{\rho \circ q} = b$ をみたすものが一意的に存在する。

⁴ これは q^* と書かれることもあるが、ここでは見た目のわかりやすさを優先した。

証明. 第 1 の条件を示すために, W の元 w, w' と X の元 x を任意に取る. 補題 2.3 によって,

$$(\rho \circ q)(\langle w + w', x \rangle - \langle w, x \rangle - \langle w', x \rangle) = 0.$$

$\rho \circ q$ は準同型写像なので,

$$(\rho \circ q)(1\langle w + w', x \rangle) = (\rho \circ q)(1\langle w, x \rangle) + (\rho \circ q)(1\langle w', x \rangle).$$

この式の左辺は $\widehat{\rho \circ q}\langle w + w', x \rangle$, 右辺は $\widehat{\rho \circ q}\langle w, x \rangle + \widehat{\rho \circ q}\langle w', x \rangle$ であるので, 第 1 の条件は成立している. 第 2, 第 3 の条件も補題 2.3 によって同様に示される. 最後の条件 $\widehat{\rho \circ q}\langle w, rx \rangle = r\widehat{\rho \circ q}\langle w, x \rangle$ は右辺に係数 r が付いている点がほかと異なるが, やはり同様である.

(ii) は, 補題 2.2 を定義 2.4 の記号で書き換えたに過ぎない. \square

補題 2.2 とはこの補題の (ii) であったと解釈し直して, 今後は補題 2.5 を用いることにしよう. この補題 2.5 は, $W \otimes X$ から Y への準同型写像全体が $W \times X$ から Y への 4 つの条件をみたす写像全体との間の関係をはっきり表している. 写像 $\widehat{- \circ q}$ とその逆写像によって互いに一対一に対応づけられているのである.

2.3 \sharp と \flat

こうして得られた成果を, この章の目的のために用いることにしよう. 少し一般性を持たせて言えば前章では, 定理 1.27 の証明 (C) に現れた, $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_i)$ ($i = 0, 1, 2$) への準同型写像について考えていた. テンソル積と補題 2.5 をその役に立てようというのである.

今はさらに一般性を持たせて, W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ について考える. ψ は W の元と M の元の順序づけられた対 $\langle w, m \rangle$ ごとに Y の元 $\psi(w)(m)$ を定めるから, $W \times M$ から Y への写像 b と見なせそうである. その b はいくつかの性質をもつだろう. ψ が準同型写像であることから $b\langle w + w', m \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w', m \rangle$ と $b\langle rw, m \rangle = b\langle w, rm \rangle$ が, どの w についても $\psi(w)$ が $\text{Hom}(M, Y)$ の元であることから $b\langle w, m + m' \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w, m' \rangle$ と $b\langle w, rm \rangle = rb\langle w, m \rangle$ が成り立ちそうである. 厳密に補題の形で述べれば, 次のとおりである.

補題 2.6

W と Y は加群とする.

(i) W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ について, $W \times M$ から Y への写像 b を, $\langle w, m \rangle$ を $\psi(w)(m)$ に写すものとする (W の元 w ごとに, $\psi(w)$ は $\text{Hom}(M, Y)$ の元であるので, M から Y への写像である). b は以下をすべてみたす:

- W の任意の元 w, w' と M の任意の元 m について, $b\langle w + w', m \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w', m \rangle$,
- W の任意の元 w と M の任意の元 m と任意の係数 r について, $b\langle rw, m \rangle = b\langle w, rm \rangle$,
- W の任意の元 w と M の任意の元 m, m' について, $b\langle w, m + m' \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w, m' \rangle$,
- W の任意の元 w と M の任意の元 m と任意の係数 r について, $b\langle w, rm \rangle = rb\langle w, m \rangle$.

(ii) $W \times M$ から Y への写像 b が (i) に記した 4 つの条件をすべてみたすならば、その b について、 W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ で、 W の任意の元 w と M の任意の元 m について $\psi(w)(m) = b\langle w, m \rangle$ をみたすものが一意的に存在する。

証明. (i) を示すために ψ は W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像であるとする。 W の任意の元 w, w' について $\psi(w + w') = \psi(w) + \psi(w')$ が、 W の任意の元 w と任意の係数 r について $\psi(rw) = r(\psi(w))$ が、それぞれ成り立つ。

$\langle w, m \rangle$ を $\psi(w)(m)$ に写す $W \times M$ から Y への写像を b とする。 W の任意の元 w, w' と M の任意の元 m を取る。 $b\langle w + w', m \rangle$ はその定義と $\psi(w + w') = \psi(w) + \psi(w')$ により $(\psi(w) + \psi(w'))(m)$ に、 $b\langle w, m \rangle + b\langle w', m \rangle$ はその定義により $\psi(w)(m) + \psi(w')(m)$ に、それぞれ等しい。 $\text{Hom}(M, Y)$ の加法の定義によりそれらは等しいので、

$$b\langle w + w', m \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w', m \rangle.$$

同じようにして、 W の任意の元 w と任意の係数 r と M の任意の元 m について、 b の定義と $\psi(rw) = r(\psi(w))$ と $\text{Hom}(M, Y)$ の左作用の定義により、

$$b\langle rw, m \rangle = b\langle w, rm \rangle.$$

W の元 w ごとに、 $\psi(w)$ は $\text{Hom}(M, Y)$ の元であるから、 M の任意の元 m, m' について $\psi(w)(m + m') = \psi(w)(m) + \psi(w)(m')$ が、 M の任意の元 m と任意の係数 r について $\psi(w)(rm) = r\psi(w)(m)$ が成り立つ。これらと b の定義によって、残りの 2 つの条件が従う：

$$\begin{aligned} b\langle w, m + m' \rangle &= b\langle w, m \rangle + b\langle w, m' \rangle, \\ b\langle w, rm \rangle &= r b\langle w, m \rangle. \end{aligned}$$

(ii) を示すために、 $W \times M$ から Y への写像 b が 4 つの条件すべてをみたすと仮定する。 W の元 w ごとに M から Y への、 m を $b\langle w, m \rangle$ に写す写像を b_w とする。どの w についても、 b に仮定された 4 つの条件のうち後半の 2 つ $b\langle w, m + m' \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w, m' \rangle$, $b\langle w, rm \rangle = r b\langle w, m \rangle$ によって

$$\begin{aligned} b_w(m + m') &= b_w(m) + b_w(m'), \\ b_w(rm) &= rb_w(m) \end{aligned}$$

が成り立つので、 b_w は準同型写像、言い換えれば $\text{Hom}(M, Y)$ の元である。

W から $\text{Hom}(M, Y)$ への、 w を b_w に写す写像を ψ とする。 W の任意の元 w, w' について、 M から Y への 2 つの写像 $\psi(w + w')$, $\psi(w) + \psi(w')$ のうち前者は M の元 m を $b\langle w + w', m \rangle$ に、後者は $(b_w + b_{w'})(m)$ に写す。仮定された最初の条件 $b\langle w + w', m \rangle = b\langle w, m \rangle + b\langle w', m \rangle$ と $\text{Hom}(M, Y)$ の加法の定義によってこれらは等しいので、

$$\psi(w + w') = \psi(w) + \psi(w').$$

同じようにして, W の任意の元 w と任意の係数 r について, 第 2 の条件 $b\langle r w, m \rangle = b\langle w, r m \rangle$ と $\text{Hom}(M, Y)$ の左作用の定義によって,

$$\psi(rw) = r\psi(w).$$

以上によって ψ は準同型写像である. $\psi(w)(m) = b\langle w, m \rangle$ も ψ と b_w の定義からすぐわかる. ψ の一意性は, そのみたすべき条件 $\psi(w)(m) = b\langle w, m \rangle$ から直ちに従う. \square

X を M に限定したとき, 前節の補題 2.5 (i) は, $W \otimes M$ から Y への準同型写像 ρ を 4 つの条件をみたす $W \times M$ から Y への写像 b に写す. 他方で補題 2.6 (ii) はそのような b を W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ に写すのだから, これらを組み合わせて, ρ を ψ に写すことができる^{*5}. これを記号 \sharp で表そう^{*6}. すなわち,

補題 2.7

W と Y は加群とする. $W \otimes M$ から Y への任意の準同型写像 ρ に対して, W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ で $\psi(w)(m) = \widehat{\rho \circ q}(w, m)$ をみたすものが一意的に存在する.

証明. ρ は $W \otimes M$ から Y への準同型写像, q は $R\langle W \times M \rangle$ から $W \otimes M$ への射影とする. $\widehat{\rho \circ q}$ を b とする. 補題 2.5 (i) によって, b は 4 つの条件をすべてみたす. この b に補題 2.6 (ii) を適用して, W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ で $\psi(w)(m) = b\langle w, m \rangle$ をみたすものが一意的に存在する. \square

定義 2.8. W と Y は加群とする. $W \otimes M$ から Y への任意の準同型写像 ρ に対して, 補題 2.7において ρ が定める ψ を ρ^\sharp と書く. すなわち,

$$\rho^\sharp(w)(m) = \widehat{\rho \circ q}(w, m).$$

逆に, ψ を ρ に写すこともできる. それを記号 \flat で表す.

補題 2.9

W と Y は加群とする. W から $\text{Hom}(M, Y)$ への任意の準同型写像 ψ に対して, $W \otimes M$ から Y への準同型写像 ρ で $\rho^\sharp = \psi$ をみたすものが一意的に存在する.

証明. ψ を W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像とする. ψ に対して, $W \times M$ から Y への写像 b を $b\langle w, m \rangle = \psi(w)(m)$ で定める.

補題 2.6 (i) によってこれが 4 つの条件をすべてみたすことがわかるので, 補題 2.5 (ii) を適用して, ρ が一意的に存在することがわかる. \square

^{*5} R が非可換の場合には, どちら側を固定するかを決めるることは R を左右のどちらから作用させるかに連動する. 左作用なら左側を, 右作用なら右側を M で固定する. 付録 (あとで書きます) を参照.

^{*6} 記号 \sharp と \flat は数学の様々な場面でその都度それなりの意味を与えられて使用されており, 用法が統一されることが無いように見える. 本稿もまたそれらと同じように (と言い切って良いのだろうか. 筆者の知らない暗黙のルールが存在するのかもしれない. ご存知の方はお知らせください), ほかの用法を気にすること無くここだけの意味で用いる.

定義 2.10. W と Y は加群とする. W から $\text{Hom}(M, Y)$ への任意の準同型写像 ψ に対して, $W \otimes M$ から Y への準同型写像 ρ で $\rho^\sharp = \psi$ をみたす唯一のものを ψ^\flat と書く.

以上を補題 2.5 や 2.6 のような形で 1 つの補題の (i) と (ii) として述べることは省略するが, $W \otimes M$ から Y への準同型写像すべての集合と W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像すべての集合は, \sharp と *flat* によって互いに一対一に対応する. 記号 \sharp と \flat の具体的な操作としては, 等式の一方の辺の \sharp を取り外して他方に \flat を付けたり, その逆にすることが許される. すなわち,

補題 2.11

W, Y は加群とする. このとき, $W \otimes M$ から Y への準同型写像 ρ と W から $\text{Hom}(M, Y)$ への準同型写像 ψ が $\rho = \psi^\flat$ をみたすには, $\rho^\sharp = \psi$ をみたすことが必要かつ十分である⁷.

証明. 必要性は ψ^\flat の定義から, 明らか. 十分性は, 補題 2.9 の唯一性から言える. \square

これで, 3 つのステップに進むことが可能になった.

2.4 ステップ 1: \flat による書き換え

ここからは, 定理 1.27 の証明に即して具体的に (必要に応じて一般論も交えて) 進めよう. 前章では, $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_1)$ への包含写像 ι の性質 $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, Y_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$ を「 $\text{Ker } f_{2*}$ の任意の元 k について $f_2 \circ \iota(k) = 0$ 」の形で捉え, k ごとに補題 1.29 を適用して, $f_{1*} \circ Q = \iota$ をみたす $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への写像 Q の存在に至ったのだった.

$\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_1)$ への包含写像を ι と書く. 補題 1.34 によって $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$.

$\text{Ker } f_{2*}$ の元 k を任意に取る. (中略) このような α を 1 つ選ぶ.

k は $\text{Ker } f_{2*}$ の任意の元だったので, 上記の選択は $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への写像 Q で $f_{1*} \circ Q = \iota$ をみたすものの存在を意味する. 補題 1.33 によって, この Q の存在から $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ が従う.

今, 我々は \flat という道具を得たから, 上記で略した部分, $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, Y_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$ から $f_{1*} \circ Q = \iota$ をみたす $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への写像 Q の存在を導く部分に, それを用いて新たな証明を与える. $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_1)$ への準同型写像 ι に代えて, $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_1 への準同型写像 ι^\flat の性質を論じるのである.

$f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, Y_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$ を ι^\flat を用いた形に書き換えるには, \flat がみたす次の補題が有用である.

補題 2.12

W と Y と Y' は加群とする. W から $\text{Hom}(M, Y)$ への任意の準同型写像 ψ と, Y から Y' への

⁷ 必要性は「 W から $\text{Hom}(M, Y)$ への任意の準同型写像 ψ に対して, $(\psi^\flat)^\sharp = \psi$ が成り立つ」と, 十分性は「 $W \otimes M$ から Y への任意の準同型写像 ρ に対して, $(\rho^\sharp)^\flat = \rho$ が成り立つ」と同値である.

任意の準同型写像 γ に対して, 次が成り立つ:

$$\gamma \circ \psi^\flat = (\gamma_* \circ \psi)^\flat.$$

前節で \flat は \sharp の逆として定義したのだから, この補題の前に, \sharp に関する同様の補題を示しておいた方が良いだろう.

補題 2.13

W と Y と Y' は加群とする. $W \otimes M$ から Y への任意の準同型写像 ρ と, Y から Y' への任意の準同型写像 γ に対して, 次が成り立つ:

$$(\gamma \circ \rho)^\sharp = \gamma_* \circ \rho^\sharp.$$

証明. W, Y, Y' は加群, ρ は $W \otimes M$ から Y への準同型写像, γ は Y から Y' への任意の準同型写像とする. q は $R\langle W \times M \rangle$ から $X \otimes M$ への射影とする. W の任意の元 w と M の任意の元 m を取る. 示すべき式の左辺に w を代入してさらに m を代入すると,

$$(\gamma \circ \rho)^\sharp(w)(m) = \widehat{\gamma \circ \rho \circ q}(w, m) = (\gamma \circ \rho \circ q)(1\langle w, m \rangle) = \gamma((\rho \circ q)(1\langle w, m \rangle))$$

が成り立ち, その一方で右辺に w を代入すると $(\gamma_* \circ \rho^\sharp)(w) = \gamma_*(\rho^\sharp(w))$. これにさらに m を代入して,

$$(\gamma_* \circ \rho^\sharp)(w)(m) = \gamma_*(\rho^\sharp(w))(m) = \gamma(\rho^\sharp(w)(m)) = \gamma(\widehat{\rho \circ q}(w, m)).$$

$\widehat{}$ の定義により $\widehat{\rho \circ q}(w, m) = (\rho \circ q)(1\langle w, m \rangle)$ なので, これらは等しい.

m は M の任意の元だったので, $(\gamma \circ \rho)^\sharp(w) = (\gamma_* \circ \rho^\sharp)(w)$.

w は W の任意の元だったので, 示すべき式 $(\gamma \circ \rho)^\sharp = \gamma_* \circ \rho^\sharp$ が従う. \square

補題 2.12 の証明. 補題 2.13 を, $\rho = \psi^\flat$ のときに適用すると, $(\gamma \circ \psi^\flat)^\sharp = \gamma_* \circ (\psi^\flat)^\sharp$. 補題 2.11 によって $(\psi^\flat)^\sharp = \psi$ であるので,

$$(\gamma \circ \psi^\flat)^\sharp = \gamma_* \circ \psi$$

が成り立つ. この W から $\text{Hom}(M, Y')$ への準同型写像についての等式に補題 2.11 を適用して, $W \otimes M$ から Y' への準同型写像についての等式 $\gamma \circ \psi^\flat = (\gamma_* \circ \psi)^\flat$ が従う. \square

もう 1 つ, ゼロ写像と \flat の関係も示しておこう.

補題 2.14

W から $\text{Hom}(M, Y)$ へのゼロ写像 $0_{\text{Hom}(M, Y)}^W$ について, $\left(0_{\text{Hom}(M, Y)}^W\right)^\flat$ は $W \otimes M$ から Y へのゼロ写像 $0_Y^{W \otimes M}$ である.

この補題を直接の代入計算で証明することもできるが, 補題 1.55 と補題 2.12 を用いれば, それは避けられる. 補題 1.55 を再掲しておく:

補題 1.55 (再掲)

X, Y は加群とする。このとき、 X から Y への準同型写像 ζ について、 ζ がゼロ写像であるには、任意の加群 Y' と Y から Y' への任意の準同型写像 g_1, g_2 について、 $g_1 \circ \zeta = g_2 \circ \zeta$ をみたすことが必要かつ十分である。

補題 2.14 の証明。 $W \otimes M$ から Y への写像 $(0_{\text{Hom}(M,Y)}^W)^\flat$ を ζ と書く。もしも、任意の加群 Y' と Y から Y' への任意の準同型写像 g_1, g_2 について、 $g_1 \circ \zeta = g_2 \circ \zeta$ の成立を確認できれば、補題 1.55 によって、 ζ は $W \otimes M$ から Y へのゼロ写像でなければならない。

そして実際、これは成り立つ。というのは、 $0_{\text{Hom}(M,Y)}^W$ に補題 1.55 に適用して得られる

$$g_{1*} \circ 0_{\text{Hom}(M,Y)}^W = g_{2*} \circ 0_{\text{Hom}(M,Y)}^W$$

の両辺に \flat を施した式

$$(g_{1*} \circ 0_{\text{Hom}(M,Y)}^W)^\flat = (g_{2*} \circ 0_{\text{Hom}(M,Y)}^W)^\flat$$

が成り立っており、補題 2.12 によって、この左辺は $g_1 \circ \zeta$ に、右辺は $g_2 \circ \zeta$ に、それぞれ等しいからである。□

ι^\flat に f_2 を合成すると、 $f_2 \circ \iota^\flat = (f_{2*} \circ \iota)^\flat = 0^\flat$ となる（補題 2.12）。そして補題 2.14 によって $0^\flat = 0$ であるから、 $f_2 \circ \iota^\flat = 0$ を得る。この式こそ我々が欲しかったもの、 $f_{2*} \circ \iota = 0$ の代替である。

2.5 ステップ 2：補題 1.29 の適用

ステップ 1 によって、元の関係式 $f_{2*} \circ \iota = 0$ は、新たな関係式 $f_2 \circ \iota^\flat = 0$ に書き直された。補題 1.29 を適用するための準備は完全に整っている。

補題 1.29 (再掲)

Y_0, Y_1, Y_2 が加群であるとし、 g_1 は Y_0 から Y_1 への、 g_2 は Y_1 から Y_2 への、どちらも準同型写像であるとする。このとき、 $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$ と $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$ が同時にみたされるには、任意の加群 Z と $g_2 \circ h = 0_{Y_2}^Z$ をみたす Z から Y_1 への任意の準同型写像 h について、 Z から Y_0 への準同型写像 \bar{h} で $g_1 \circ \bar{h} = h$ をみたすものが存在することが必要である。

今、 $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$ と $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$ がみたされており、 $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_1 への準同型写像 ι^\flat について $f_2 \circ \iota^\flat = 0$ が成り立っている。これに補題 1.29 を適用すると、 $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_0 へのある準同型写像 P が存在して、 ι^\flat が

$$f_1 \circ P = \iota^\flat$$

と分解されることがわかる。短いが、これがステップ 2 である。

2.6 ステップ 3：テンソル積を含まない形に直す

ステップ 2 で得られた $(\text{Ker } f_{2*}) \otimes M$ から N_1 への準同型写像の等式 $f_1 \circ P = \iota^\flat$ は、 ι の分解ではなく ι^\flat の分解である。定理 1.27 の証明の末尾部分は

(前略) $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への写像 Q で $f_{1*} \circ Q = \iota$ をみたすものの存在を意味する。補題 1.33 によって、この Q の存在から $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ が従う。

となっていて、我々が行っている書き換えはこれに接続するために ι の分解を得て終わらなければならない。それは補題 2.11 と 2.13 によって可能である。 $f_1 \circ P = \iota^\flat$ に補題 2.11 を適用してできる、 $\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_1)$ への準同型写像の等式

$$(f_1 \circ P)^\sharp = \iota$$

の左辺が補題 2.13 によって $f_{1*} \circ P^\sharp$ なので、 $f_{1*} \circ P^\sharp = \iota$ が得られるためである。

ようやく全ての準備が終わった。これで定理 1.27 の証明を書き換えることができる。

2.7 Hom は左完全である

定理 1.27 (再掲)

$\{0\} \rightarrow N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} N_2$ は加群の完全列とする。このとき、次も加群の完全列である：

$$\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2).$$

定理 1.27 の証明。仮定された完全性によって、 $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$, $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$, $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$ が成り立っている。これらの条件の下、 $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$ が完全列であることを示したい。そのためには、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$, $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$, $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ の 3 つの条件をそれぞれ示せば十分である(系 1.25)。

(A) $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ が成り立つこと：

$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$ に補題 1.26 (a) を適用して $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ 。これによって、

$$(f_2 \circ f_1)_* = 0_{N_2*}^{N_0}$$

が得られる。この式の左辺は補題 1.28 によって $f_{2*} \circ f_{1*}$ に等しい。その一方、右辺は補題 1.20 によって $0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ に等しい。

以上によって $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ 。これに補題 1.26 (b) を適用して、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ がわかる。

(B) $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ が成り立つこと：

$\text{Ker } f_{1*}$ の元 k を任意に取って固定する。 k は $\text{Ker } f_{1*}$ の定義によって、 $f_{1*}(k) = 0$ をみたす。この式の左辺は $-_*$ の定義によって $f_1 \circ k$ であり、右辺は系 1.17 によって

$0_{N_1}^M$ であるから,

$$f_1 \circ k = 0_{N_1}^M.$$

この式は, M の各元 m に対してそのみたすべき条件 $f_1(k(m)) = 0$ を課す. これは $k(m)$ が $\text{Ker } f_1$ に属することを意味し, それと $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$ を合わせると, $k(m) = 0$ が従う. M の任意の元 m に対してこれが成り立つことは, $k = 0_{N_0}^M$ を意味する. これと系 1.17 によって, $k = 0$.

k は $\text{Ker } f_{1*}$ の任意の元だったので, $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$.

(C) $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ が成り立つこと:

$\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_1)$ への包含写像を ι と書く. 補題 1.34 によって $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$.

このとき, 定義 2.10 によって定まる $\text{Ker } f_{2*} \otimes M$ から N_1 への準同型写像 ι^\flat は, 補題 2.12 によって

$$f_2 \circ \iota^\flat = (f_{2*} \circ \iota)^\flat$$

をみたす. 右辺は $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$ によって 0^\flat であり, 補題 2.14 によってそれはゼロ写像である. こうして得られた式 $f_2 \circ \iota^\flat = 0$ に補題 1.29 を適用すると, $\text{Ker } f_{2*} \otimes M$ から N_0 へのある準同型写像 P が存在して, 次をみたす:

$$f_1 \circ P = \iota^\flat.$$

これに補題 2.11 を適用して得られる $(f_1 \circ P)^\sharp = \iota$ の左辺に補題 2.13 を適用して,

$$f_{1*} \circ P^\sharp = \iota.$$

$\text{Ker } f_{2*}$ から $\text{Hom}(M, N_0)$ への準同型写像 P^\sharp を Q とおくと, $\iota = f_{1*} \circ Q$. 補題 1.33 によって, この Q の存在から $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ が従う.

以上によって $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$, $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$, $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$ の 3 条件がすべて示されたので, 系 1.25 の適用によって $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$ は完全列である. \square