

# 第 1 章

## 最初の証明, 最初の改良

この章は 8 つの節からなる。最初の 3 つの節は基礎的な概念（左  $R$ -加群とその準同型写像,  $\text{Hom}$ , 完全列）を紹介し, 第 1.4 節はそれらの用語によって「 $\text{Hom}$  の左完全性」と呼ばれる命題（定理 1.27）を記述し証明する。続く第 1.5 節は証明の一部を補題として切り出すことについて的一般論を, 第 1.6 節はそのために変数の範囲を分割することを, そして第 1.7 節は包含写像による書き換えを扱う。これら 3 つの節の成果としていくつかの補題が生まれ,  $\text{Hom}$  の左完全性の証明は第 1.8 節でそれらを適用する形の比較的短いものに書き直される。

$\text{Hom}$  の左完全性は, その名のとおり,  $\text{Hom}$  と左完全列の性質を用いて証明される。見方を変えれば, その証明を分析することでこれらの 2 概念のはたらきを知ることができるということである。これがこの稿の大きな目的である。8 つの節をこの目的に照らして言い直せば, 第 1.4 節がこの稿を通じての分析の主な対象となる定理とその証明の紹介であり, それより前の節はそのための用語や概念の準備, それより後の節は次章以降に行われる分析のための前処理である。

### 1.1 加群と準同型写像

**左  $R$ -加群**とその**準同型写像**を定義しなければならない。前者, 左  $R$ -加群は 4 つの条件をみたす**左作用**の構造を付加されたアーベル群として定義され, アーベル群は別の 4 つの条件によって定義される（あるいは, 2 つの定義を 1 つにまとめて 8 つの条件によって扱うこともできるだろう<sup>\*1</sup>）。

**定義 1.1** (アーベル群).  $X$  は集合とする。 $+$  は  $X \times X$  から  $X$  への写像を中置記法<sup>\*2</sup>で表したものとする。このとき, 順序対  $\langle X, + \rangle$  が**アーベル群**であるとは,

- $X$  の任意の元  $x_1, x_2, x_3$  について  $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ ,
- $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

<sup>\*1</sup> この稿を通して, 興味の対象はすぐ後に述べる左  $R$ -加群にあり, アーベル群ではない。知識を持つ読者のための記述が本文中に現れることはあり得るが, その場合にはその文を読み飛ばしても差し支えないように書かれるだろう。

<sup>\*2</sup>  $\mu$  が 2 つの集合の直積からの写像であるとき, その  $\langle x, y \rangle$  における値を  $x \mu y$  と書き表す記法を中置記法と呼ぶ。日常的に加法や乗法などに用いられている記法である。もしも前置するなら, 定義 1.1 に登場する式を例えば  $\mu(x, y) = \mu(y, x)$  のように表すことになるが, そうでなく中置記法によって表すのが普通である。

の 2 条件がみたされ、かつ、 $X$  のある元  $0$  が存在して、

- $X$  の任意の元  $x$  について  $x + 0 = x$ ,
- $X$  の任意の元  $x$  について  $X$  のある元  $-x$  が存在して、 $x + (-x) = 0$

もみたされることを言う。ここに現れた  $+$  と  $0$  はそれぞれ、このアーベル群の**加法**とその**単位元**と呼ばれ、 $-x$  は  $x$  の ( $+$  に関する) **逆元**と呼ばれる。 $x + y$  は  $x$  と  $y$  の**和**と呼ばれる。

$x + (-y)$  のことを  $x - y$  と、 $(x + y) + z$  のことを  $x + y + z$  と書く<sup>\*3</sup>.

**注意.** 加法の単位元  $0$  は一意に、 $x$  の逆元  $-x$  は  $x$  ごとに一意に定まる。と言うのは、 $0$  と  $0'$  が加法  $+$  の単位元であるとすると

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

が成り立つので単位元の一意性が、 $-x$  と  $\exists x$  が  $x$  の逆元であるとすると

$$-x = -x + 0 = -x + x + \exists x = \exists x + x + (-x) = \exists x + 0 = \exists x$$

が成り立つので逆元  $-x$  の一意性が、それぞれ示されるためである。

**定義 1.2** (左  $R$ -加群).  $\langle X, + \rangle$  はアーベル群であるとする。 $R$  は乗法の単位元  $1$  をもつ可換環であるとし、 $\cdot$  は直積  $R \times X$  から  $X$  への写像を中置記法で表したものとする。このとき、3 つ組  $\langle X, +, \cdot \rangle$  が**左  $R$ -加群**であるとは、4 つの条件

- $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  と  $R$  の任意の元  $r$  について  $r \cdot (x_1 + x_2) = r \cdot x_1 + r \cdot x_2$ ,
- $X$  の任意の元  $x$  と  $R$  の任意の元  $r_1, r_2$  について  $(r_1 r_2) \cdot x = r_1 \cdot (r_2 \cdot x)$ ,
- $X$  の任意の元  $x$  について  $1 \cdot x = x$ ,
- $X$  の任意の元  $x$  と  $R$  の任意の元  $r_1, r_2$  について  $(r_1 + r_2) \cdot x = r_1 \cdot x + r_2 \cdot x$

のすべてがみたされることを言う。ここに現れた  $\cdot$  は、この左  $R$ -加群の**左作用**と、 $R$  はこの左  $R$ -加群の**係数環**と呼ばれる。 $\langle X, + \rangle$  の単位元はこの左  $R$ -加群の**ゼロ元**と呼ばれる。個々の項  $r \cdot x$  について  $r$  をこの項の**係数**と言う。

**注意.** 定義 1.2 は  $R$  の積が可換でないときにも有効であるが、この稿では可換性を仮定する<sup>\*4</sup>。

この後のいくつかの証明の中で用いられる基礎的な事実をまとめておこう。

### 補題 1.3

$\langle X, +, \cdot \rangle$  が左  $R$ -加群であるとき、

- (a)  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $-(x_1 + x_2) = -x_1 - x_2$ ,

---

<sup>\*3</sup> そして、これは  $x + (y + z)$  に等しいわけである。

<sup>\*4</sup>  $R$  に可換性の上にさらに体であることも仮定するならば、定義 1.2 はそのまま（抽象的な意味の） $R$ -ベクトル空間の定義そのものであり、後述の定義 1.8 はそのまで  $R$ -線形写像の定義そのものである。

- (b)  $X$  の任意の元  $x$  について  $0 \cdot x = 0$ ,
- (c)  $X$  の任意の元  $x$  について  $(-1) \cdot x = -x$ ,
- (d) 任意の係数  $r$  について  $r \cdot 0 = 0$ ,
- (e)  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $-(r \cdot x) = r \cdot (-x)$

が、それぞれ成り立つ<sup>\*5\*6</sup>.

証明. (b) は

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x$$

の辺々に  $-(0 \cdot x)$  を加えることによって、(d) は

$$r \cdot 0 + r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0$$

の辺々に  $-(r \cdot 0)$  を加えることによって、それぞれ確かめられる.

(a), (c), (e) のためにはそれぞれ、 $x_1 + x_2 + (-x_1 - x_2)$ ,  $x + (-1) \cdot x$ ,  $r \cdot x + r \cdot (-x)$  が  $X$  のゼロ元であることを示せば十分である. そしてそれらは実際,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (-x_1 - x_2) &= x_1 - x_1 + (x_2 - x_2) = 0 + 0 = 0, \\ x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0, \\ r \cdot x + r \cdot (-x) &= r \cdot (x - x) = r \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

によって確かめられる ((c) を示すために (b) の, (e) を示すために (d) の結果を用いた)<sup>\*7</sup>. □

この補題は、後の補題 1.5 や補題 1.16 などの証明の中で用いられる.

左  $R$ -加群の特殊な例として、 $X$  が単一の元からなる場合がある. この場合には、必要な構造はすべて自動的である. 加法は  $X \times X$  から  $X$  への写像であり左作用は  $R \times X$  から  $X$  への写像であるが、一般に単元集合への写像は唯一に定まるので、選択の余地が無いのである.

#### 補題 1.4

1 つの元  $z$  のみからなる集合  $\{z\}$  に上に述べたように自動的に定まる加法  $+$  と左作用  $\cdot$  によって、 $\langle \{z\}, +, \cdot \rangle$  は左  $R$ -加群となる.

証明. 8 つの条件はどれも、その両辺が  $z$  であるので成立している. □

この  $\{z\}$  の唯一の元  $z$  はこの左  $R$ -加群のゼロ元であるので、今後はこの左  $R$ -加群を  $\{0\}$  と書く.

定義 1.2 はどのような状況にも対応できるように書かれているが、その代償として実用上の面倒が生じる. 左  $R$ -加群ごとに 1 つの加法の記号と 1 つの左  $R$ -作用の記号を用意することが要求され

<sup>\*5</sup> (a) は単に  $\langle X, + \rangle$  がアーベル群であるという設定でも当然成り立つのだが、この稿では  $\langle X, +, \cdot \rangle$  が左  $R$ -加群であるときにしか興味がないので、ほかの 4 つと区別せずに 1 つの補題にまとめてしまった.

<sup>\*6</sup> (b) の左辺に出現した 0 は  $R$  の元、右辺に出現した 0 は  $X$  の元である.

<sup>\*7</sup> 最初の等式の左の等号は、本来は  $x_1 + x_2 + (-x_1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1 - x_2 = x_1 + (x_2 - x_1) - x_2 = x_1 + (-x_1 + x_2) - x_2 = x_1 - x_1 + (x_2 - x_2)$  のように書くべきところだが、ここでは省略した.

るのである。もしも同一の集合の上に異なる加法や異なる左  $R$ -作用が考慮されるのならば、これは仕方の無いことである<sup>\*8</sup>。しかし、この稿に限って言えば、そのようなことは**部分加群**に関して起こるくらいでほかには生じない。部分加群の概念が必要になるのは少し先の第 1.3 節のことであるが、今ここでその定義を確認して、略記の紹介を急ぐことにしよう。

### 補題 1.5

$\langle X, +, \cdot \rangle$  は左  $R$ -加群、 $S$  は  $X$  の空でない部分集合であるとする。 $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $x_1 + x_2$  が  $S$  に属すことと  $S$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $r \cdot x$  が  $S$  に属すことの両方が成り立つとき、 $S \times S$  から  $S$  への写像田を  $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について

$$x_1 \boxplus x_2 = x_1 + x_2$$

によって、 $R \times S$  から  $S$  への写像田を  $S$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について

$$r \boxdot x = r \cdot x$$

によって、それぞれ定義するとき、 $\langle S, \boxplus, \boxdot \rangle$  は左  $R$ -加群である。

証明。補題 1.3 (b) によって  $\langle X, +, \cdot \rangle$  のゼロ元が  $S$  に属していることが、(c) によって  $S$  の任意の元  $x$  について  $-x$  が  $S$  に属していることが、それぞれわかる。田や田は、それぞれの定義域内で + や · と一致しているので、定義 1.1 と定義 1.2 の 8 つの条件をみたす。□

**注意.** 上の補題における、 $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $x_1 + x_2$  が  $S$  に属すという条件は、 $S \times S$  から  $S$  への写像田が存在して、 $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について

$$x_1 \boxplus x_2 = x_1 + x_2$$

をみたすことと言い換えても良い。田も同様である。

**注意.** 田はその定義域内で + と一致しなければならないので、存在すれば一意である。田も同様である。

**定義 1.6 (部分加群).**  $\langle X, +, \cdot \rangle$  は左  $R$ -加群、 $S$  は  $X$  の空でない部分集合であるとする。 $\langle S, \boxplus, \boxdot \rangle$  が  $\langle X, +, \cdot \rangle$  の**部分加群**であるとは、上の補題 1.5 の条件を  $\langle S, \boxplus, \boxdot \rangle$  がみたしていることを言う。

上記の状況に限って言えば、同一の集合  $S$  の上に + と田の 2 つの加法が定義されてはいるものの、 $\langle X, +, \cdot \rangle$  の加法の記号 + を  $\langle S, \boxplus, \boxdot \rangle$  の加法の記号に流用してしまっても、そもそも  $x$  田  $y$  とは  $x + y$  であるのだから実際に読むときには大した問題は生じない。これはすなわち、別の記号を用意するメリットがほとんど無いということであるから、この稿では部分加群の加法の記号に元の左  $R$ -加群の加法の記号をそのまま流用する<sup>\*9</sup>。左  $R$ -作用についても同様である。

<sup>\*8</sup> 筆者が数学科に入ってすぐの頃、 $G_c = \{ x \in \mathbb{R} \mid -c < x < c \}$ ,  $x +_c y = (x + y) / \left(1 + \frac{xy}{c^2}\right)$  として  $\langle G_c, +_c \rangle$  がアーベル群になることを示せ、という演習問題を解いた。良く知っている集合に良く知っているのとは異なる加法が入るのを見たのは、それが初めてだった。

<sup>\*9</sup> この稿に限らない多くの本や論文にあっても事情は同じであり、やはりこの流用が暗黙のうちに採用されている。

そして先述したように、この稿では、1つの集合の上には加法と左  $R$ -作用は（部分加群の場合を除けば）それぞれ1通りしか定まっていないという仮定を置くことができる。これは、**すべての左  $R$ -加群の加法の記号に  $+$  を、左  $R$ -作用の記号に  $\cdot$  を用いても、それらが文中に出現するたびにどの左  $R$ -加群の加法や左  $R$ -作用であるのかが部分加群を除いて明らかということであるから、今後は個々の左  $R$ -加群について記号を区別することはしない。それどころか、 $\cdot$  を省略する。**

**定義 1.7.** すべての加群の加法を同じ記号  $+$  で、左作用を同じ記号  $\cdot$  で、とそれぞれ書き表す。その上、 $\langle X, +, \cdot \rangle$  を単に  $X$  と書く。それぞれの項  $r \cdot x$  も基本的には単に  $rx$  と書く。

さらに、1をもつ可換環  $R$  は本稿を通じて**固定されているもの**として扱い、これ以降は明記しない。「係数環」と書かれていればそれはこの  $R$  のことであり、「係数」と書かれていれば  $R$  の元を指す。「作用」と書かれていれば左  $R$ -作用の、「加群」と書かれていれば左  $R$ -加群のことである<sup>\*10</sup>。

以上に述べた省略は、典型的には、「 $X$  は加群である」という文に現れる。つまり、何らかの固定された  $R$  があるものと仮定されていて、その上、何らかの加法  $+$  と何らかの左  $R$ -作用  $\cdot$  が  $X$  に働くいていることも仮定されていて、「 $\langle X, +, \cdot \rangle$  は左  $R$ -加群である」と書かれるべきものが「 $X$  は加群である」と略記されているのである。

もう1つの基礎的な概念である**準同型写像**<sup>\*11</sup>の定義は次のとおりである：

**定義 1.8.**  $X, Y$  がともに加群であり、 $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であるとする。 $f$  が  $X$  から  $Y$  への**準同型写像**であるとは、0, 加法, 作用のそれぞれに関する条件

- $f(0) = 0$ ,
- $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ,
- $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $f(rx) = rf(x)$

のすべてが成り立つことを言う。

この定義では3条件をそれぞれ確認しなければならないところを2条件の確認で済ませるために、次の補題とその系が用いられることが多い<sup>\*12</sup>。

### 補題 1.9

$X, Y$  がともに加群であり、 $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であるとする。もしも加法に関する上記の条件が、すなわち、 $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  が成り立つならば、 $f(0) = 0$  も成り立たねばならない。

証明。上記の条件が成り立つことを仮定する。このとき、 $f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0)$  の辺々

<sup>\*10</sup>  $R$  だけでなく「左」も省すのは、右  $R$ -加群がこの稿に登場しないからである。付録（あとで書きます）では、右  $R$ -加群についても説明している。

<sup>\*11</sup> 一般には、準同型写像と呼ばれるものはほかにもある（例えば、群の準同型写像がそうだし、右  $R$ -加群の準同型写像もそうである）ので、区別のためには**左  $R$ -加群の準同型写像**と呼ぶべきである。

<sup>\*12</sup> より正確に言えば、2条件をみたすことを定義として採用している文献がほとんどである。

に  $-f(0)$  を足して  $f(0) = 0$  が従う (第 2 の等号では  $0 + 0 = 0$  を用いた).  $\square$

### 系 1.10

$f$  が  $X$  から  $Y$  への準同型写像であるには, 定義 1.8 に挙げられた 3 条件のうち,  $f(0) = 0$  以外の 2 条件さえ成立すれば十分である.

2 つの準同型写像の合成は準同型写像である. すなわち, 次が成り立つ.

### 補題 1.11

$X, Y, Z$  を加群とする. このとき,  $X$  から  $Y$  への任意の準同型写像  $f$  と  $Y$  から  $Z$  への任意の準同型写像  $g$  について, 合成写像  $g \circ f$  は  $X$  から  $Z$  への準同型写像である.

証明. 加法に関する条件は,  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  に対して成り立つ式

$$g(f(x_1 + x_2)) = g(f(x_1) + f(x_2)) = g(f(x_1)) + g(f(x_2))$$

の左辺が  $(g \circ f)(x_1 + x_2)$  であり, 右辺が  $(g \circ f)(x_1) + (g \circ f)(x_2)$  であることによって確かめられる. 作用に関する条件は,  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  に対して成り立つ式

$$g(f(rx)) = g(rf(x)) = rg(f(x))$$

の左辺が  $(g \circ f)(rx)$  であり, 右辺が  $r(g \circ f)(x)$  であることによって確かめられる<sup>\*13</sup>.  $\square$

準同型写像の合成は結合的である. すなわち, 次が成り立つ.

### 補題 1.12

$X, Y, Z, W$  を加群とする. このとき,  $X$  から  $Y$  への任意の準同型写像  $f$ ,  $Y$  から  $Z$  への任意の準同型写像  $g$ ,  $Z$  から  $W$  への任意の準同型写像  $h$  について,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  が成り立つ.

証明. 示すべき式  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  は準同型写像だけでなく写像全般について成り立つので, 準同型写像に限定しても当然正しい.  $\square$

**定義 1.13 (ゼロ写像).** 任意の加群  $X, Y$  に対して,  $X$  のどの元も  $Y$  の加法の単位元 0 に写す写像を,  $X$  から  $Y$  への**ゼロ写像**と言い, この稿では  $0_Y^X$  と書く.

### 補題 1.14

任意の加群  $X, Y$  に対して,  $0_Y^X$  は準同型写像である.

証明.  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  に対して  $0_Y^X(x_1 + x_2) = 0_Y^X(x_1) + 0_Y^X(x_2)$  が成り立つことと,  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  に対して  $0_Y^X(rx) = r0_Y^X(x)$  が成り立つことが, どちらも直接確かめられる. というのは, どちらの式も両辺が同一の値 0 でつねに一致しているからである.  $\square$

---

<sup>\*13</sup> この式に現れる  $rf(x)$  は, 現時点では  $Y$  の元  $f(x)$  の  $r$  倍であるが, 次節でもう 1 つの意味をもつ. どちらの意味でも値は同じ  $rf(x)$  であるので, 括弧をつける必要は生じない.

ゼロ写像は、次の第 1.2 節において重要な役割を負う。また、第 1.3 節でも用いられる。部分加群に対応する準同型写像の例として**包含写像**を挙げることができるが、これについては後述する(第 1.7 節)。

## 1.2 Hom

次に、2つの加群に対して1つの加群を定める記号  $\text{Hom}(-, -)$  を定義しよう<sup>14</sup>。

**定義 1.15 (Hom).** 任意の加群  $X, Y$  に対して、 $X$  から  $Y$  への準同型写像をすべて集めた集合を  $\text{Hom}(X, Y)$  と書く。

これに加法と作用を定義して、加群として扱いたい。ゼロ写像  $0_Y^X$  が  $X$  から  $Y$  への準同型写像であること、たった今定義した言葉に言い換えれば  $\text{Hom}(X, Y)$  の元であることは前節で既に示されていた。 $\text{Hom}(X, Y)$  のゼロ元を  $0_Y^X$  が担うことは想像に難くないだろう。 $0_Y^X$  は、 $X$  の元を代入するごとに  $Y$  のゼロ元となるからである。加法と逆元についても、以下に述べるように、 $X$  の任意の元を代入して  $Y$  の当該の構造を用いて定める。作用は  $X$  の作用を用いて定める<sup>15</sup>：

### 命題 1.16

$X, Y$  は任意の加群とする。 $\text{Hom}(X, Y)$  の任意の元  $\alpha, \beta$  に対して、 $X$  から  $Y$  への写像  $\alpha + \beta$  を

- $\alpha + \beta$  とは、 $X$  の各元  $x$  を  $\alpha(x) + \beta(x)$  に写す写像である

と定めると、 $\alpha + \beta$  は  $\text{Hom}(X, Y)$  の元であり、 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  と  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  をみたす。また、 $\alpha + 0_Y^X = \alpha$  も成り立つ。 $\text{Hom}(X, Y)$  の任意の元  $\alpha$  に対して、 $X$  から  $Y$  への写像  $-\alpha$  を

- $-\alpha$  とは、 $X$  の各元  $x$  を  $-(\alpha(x))$  に写す写像である

と定めると、 $-\alpha$  は  $\text{Hom}(X, Y)$  の元であり、 $\alpha + (-\alpha) = 0_Y^X$ 。これらによって定義 1.1 の 4 条件がみたされ、 $\text{Hom}(X, Y)$  はアーベル群である。

さらに、 $\text{Hom}(X, Y)$  の任意の元  $\alpha$  と任意の係数  $r'$  に対して<sup>16</sup>、 $X$  から  $Y$  への写像  $r'\alpha$  を

- $r'\alpha$  とは、 $X$  の各元  $x$  を  $\alpha(r'x)$  に写す写像である

と定めると<sup>17</sup>、 $r'\alpha$  は  $\text{Hom}(X, Y)$  の元である。これを作用とすることによって、定義 1.2 の 4 条件がみたされ、 $\text{Hom}(X, Y)$  は加群である。

---

\*<sup>14</sup> これも  $R$  に依存するので本来は  $\text{Hom}_R(X, Y)$  などと記すべきだが、この稿では記号の煩雑さを避けて省略する。

\*<sup>15</sup>  $Y$  の作用によって定めても同じことではあるが、付録（あとで書きます）に記したように、 $R$  の可換性を仮定しない場合には両者の間に違いがあり、一応それを考慮に入れて  $X$  の作用によるものとした。

\*<sup>16</sup>  $\text{Hom}(X, Y)$  の元に作用するこの係数のほかにそうでない係数も登場するので、この補題とそれに続く証明の中では、判別しやすいように前者にだけ'を付すことにしてある。付録（あとで書きます）も参照のこと。

\*<sup>17</sup>  $\alpha$  は準同型写像なのだから、 $r'(\alpha(x))$  と書いても同じことである。付録（あとで書きます）も参照のこと。

証明.  $\alpha + \beta$  が準同型写像であるための加法に関する条件は,  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x_1 + x_2) &= \alpha(x_1 + x_2) + \beta(x_1 + x_2) \\ &= \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \beta(x_1) + \beta(x_2) \\ &= \alpha(x_1) + \beta(x_1) + \alpha(x_2) + \beta(x_2) \\ &= (\alpha + \beta)(x_1) + (\alpha + \beta)(x_2) \end{aligned}$$

が成立しているため<sup>\*18</sup>, 作用に関する条件も  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(rx) &= \alpha(rx) + \beta(rx) \\ &= r(\alpha(x)) + r(\beta(x)) \\ &= r(\alpha(x) + \beta(x)) \\ &= r((\alpha + \beta)(x)) \end{aligned}$$

が成立しているため, どちらも示されて,  $\alpha + \beta$  は系 1.10 によって準同型写像である.

$-\alpha$  が準同型写像であるための加法に関する条件は,  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について

$$(-\alpha)(x_1 + x_2) = -(\alpha(x_1 + x_2)) = -(\alpha(x_1) + \alpha(x_2))$$

の右辺と

$$(-\alpha)(x_1) + (-\alpha)(x_2) = -(\alpha(x_1)) - (\alpha(x_2))$$

の右辺が等しいことが補題 1.3 (a) によってわかるので, 成立している. 作用に関する条件も,  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $(-\alpha)(rx) = -(\alpha(rx)) = -(r(\alpha(x)))$  の右辺と  $r((-\alpha)(x)) = r(-(\alpha(x)))$  の右辺が等しいことが補題 1.3 (e) によってわかるので, 成立している.  $-\alpha$  は系 1.10 によって準同型写像である.

$0_Y^X$  を単位元,  $-\alpha$  を  $\alpha$  の逆元として定義 1.1 の 4 条件がみたされることは, それぞれ,  $X$  の任意の元  $x$  を代入して  $Y$  の当該の性質を適用することによって示される.

$r'\alpha$  が準同型写像であるための加法に関する条件は,  $X$  の任意の元  $x_1, x_2$  について

$$(r'\alpha)(x_1 + x_2) = \alpha(r'(x_1 + x_2)) = \alpha(r'x_1 + r'x_2) = \alpha(r'x_1) + \alpha(r'x_2) = (r'\alpha)(x_1) + (r'\alpha)(x_2)$$

が成り立つことによって, 作用に関する条件も,  $X$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について

$$(r'\alpha)(rx) = \alpha(r'rx) = \alpha(rr'x) = r(\alpha(r'x)) = r((r'\alpha)(x))$$

が成り立つことによって, それぞれ確かめられる.  $r'\alpha$  は系 1.10 によって準同型写像である.

定義 1.2 の 4 条件は, それぞれ,

$$\begin{aligned} (r'(\alpha + \beta))(x) &= (\alpha + \beta)(r'x) = \alpha(r'x) + \beta(r'x) = (r'\alpha)(x) + (r'\beta)(x), \\ ((r'_1 r'_2)\alpha)(x) &= \alpha(r'_1 r'_2 x) = \alpha(r'_2 r'_1 x) = \alpha(r'_2(r'_1 x)) = (r'_2\alpha)(r'_1(x)) = (r'_1(r'_2\alpha))(x), \\ (1\alpha)(x) &= \alpha(1x) = \alpha(x), \end{aligned}$$

---

<sup>\*18</sup> ここには省略がある. 補題 1.3 の証明に付された注を参照のこと.

$$\begin{aligned}
((r'_1 + r'_2)\alpha)(x) &= \alpha((r'_1 + r'_2)x) \\
&= \alpha(r'_1 x + r'_2 x) \\
&= \alpha(r'_1 x) + \alpha(r'_2 x) \\
&= (r'_1 \alpha)(x) + (r'_2 \alpha)(x) \\
&= (r'_1 \alpha + r'_2 \alpha)(x)
\end{aligned}$$

によって確かめられる。以上によって  $\text{Hom}(X, Y)$  が加群であることが示された。  $\square$

つねに、この構造によって  $\text{Hom}(X, Y)$  を加群とみなす。

**注意.**  $(-\alpha)(x)$  と  $-(\alpha(x))$  は同一の元を指すので、これ以降は括弧を付けずに単に  $-\alpha(x)$  と書き表す。 $(r\alpha)(x)$  と  $r(\alpha(x))$  についても、どちらも同一の元  $\alpha(rx)$  に等しいので、同様である。

### 系 1.17

ゼロ写像  $0_Y^X$  はこの補題 1.16 の意味でゼロ元であるので、誤解のおそれの無い場合には、添字を略して単に 0 と書くことがある。すなわち、 $0_Y^X = 0$ 。

ここまで  $\text{Hom}(X, Y)$  の  $X$  と  $Y$  はともに任意としていたが、この稿の興味は  $X$  が 1 つの加群  $M$  に固定されて  $Y$  のみに任意性がある状況に、つまり、 $\text{Hom}(M, Y)$  の  $Y$  を動かすことにある。このため、 $R$  に置いた仮定と同じく、 $M$  もこの稿を通じて**固定されている**ものとして扱う。

**定義 1.18** ( $f_*$ ).  $Y, Y'$  を加群とする。 $Y$  から  $Y'$  への任意の準同型写像  $f$  に対して、 $\text{Hom}(M, Y)$  から  $\text{Hom}(M, Y')$  への、 $\alpha$  を  $f \circ \alpha$  に写す写像 ( $f \circ \alpha$  が  $\text{Hom}(M, Y')$  の元であることは、補題 1.11 による) を  $f_*$  と書く。すなわち、

$$f_*(\alpha) = f \circ \alpha.$$

言い換れば、 $f_*(\alpha)$  とは、 $M$  の任意の元  $m$  について次をみたす  $\text{Hom}(M, Y')$  の元である：

$$f_*(\alpha)(m) = f(\alpha(m)).$$

### 命題 1.19

$f_*$  は  $\text{Hom}(M, Y)$  から  $\text{Hom}(M, Y')$  への準同型写像である。

証明.  $\text{Hom}(M, Y)$  の任意の元  $\alpha_1, \alpha_2$  に対して、 $f_*(\alpha_1 + \alpha_2) = f_*(\alpha_1) + f_*(\alpha_2)$  を示すためにその左辺に  $M$  の任意の元  $m$  を代入すると

$$f_*(\alpha_1 + \alpha_2)(m) = f((\alpha_1 + \alpha_2)(m)) = f(\alpha_1(m) + \alpha_2(m)) = f(\alpha_1(m)) + f(\alpha_2(m))$$

が、右辺に代入しても

$$(f_*(\alpha_1) + f_*(\alpha_2))(m) = f_*(\alpha_1)(m) + f_*(\alpha_2)(m) = f(\alpha_1(m)) + f(\alpha_2(m))$$

が得られる。これらが  $Y'$  の同一の元を指しているので、 $f_*(\alpha_1 + \alpha_2) = f_*(\alpha_1) + f_*(\alpha_2)$  は正しい。

$\text{Hom}(M, Y)$  の任意の元  $\alpha$  と任意の係数  $r$  に対して,  $f_*(r\alpha) = rf_*(\alpha)$  を示すためにその左辺に  $M$  の任意の元  $m$  を代入すると

$$f_*(r\alpha)(m) = f(r\alpha(m)) = f(\alpha(rm))$$

が, 右辺に代入しても

$$(rf_*(\alpha))(m) = f_*(\alpha)(rm) = f(\alpha(rm))$$

が得られる. これらが  $Y'$  の同一の元を指しているので,  $f_*(r\alpha) = rf_*(\alpha)$  も正しい.

以上と系 1.10 によって,  $f_*$  は準同型写像である.  $\square$

### 補題 1.20

任意の加群  $Y, Y'$  について,  $0_{Y'*}^Y$  は  $\text{Hom}(M, Y)$  から  $\text{Hom}(M, Y')$  へのゼロ写像である. すなわち,  $0_{Y'*}^Y = 0_{\text{Hom}(M, Y')}^{\text{Hom}(M, Y)}$ .

証明.  $0_{Y'*}^Y$  は補題 1.14 によって  $Y$  から  $Y'$  への準同型写像である.  $\text{Hom}(M, Y)$  の任意の元  $\alpha$  について  $0_{Y'*}^Y(\alpha)$  はその定義により  $M$  の任意の元  $m$  について

$$0_{Y'*}^Y(\alpha)(m) = 0_{Y'}^Y(\alpha(m))$$

をみたす.  $0_{Y'*}^Y$  の定義により, この式の右辺は  $Y'$  のゼロ元である.  $m$  は  $M$  の任意の元だったので,

$$0_{Y'*}^Y(\alpha) = 0_{Y'}^M.$$

$0_{Y'}^M$  は系 1.17 により  $\text{Hom}(M, Y')$  のゼロ元であるから, これは  $0_{Y'*}^Y(\alpha)$  が  $\text{Hom}(M, Y')$  のゼロ元であることを意味する.

$\alpha$  は  $\text{Hom}(M, Y)$  の任意の元だったので, 以上によって  $0_{Y'*}^Y = 0_{\text{Hom}(M, Y')}^{\text{Hom}(M, Y)}$  が示された.  $\square$

これ以上の  $\text{Hom}(M, -)$  の性質は, 後に定理 1.27 の証明の中から見出されるだろう.

## 1.3 完全列

この節の目的は用語「完全列」を<sup>\*19</sup>説明することであり, それは核と像の 2 つの概念に基づいて定義される.

**定義 1.21** (核, 像). 任意の加群  $X, Y$  と,  $X$  から  $Y$  への任意の準同型写像  $f$  に対して,  $X$  の部分集合  $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$  のことを  $f$  の核といい,  $\text{Ker } f$  と書く.  $Y$  の部分集合  $\{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ で } f(x) = y \text{ となるものが存在する}\}$  のことを  $f$  の像といい,  $\text{Im } f$  と書く.

---

<sup>\*19</sup> その中でも左完全列と呼ばれるごく限られた完全列にはほとんど興味が限られる.

$\text{Ker } f$  は  $X$  の,  $\text{Im } f$  は  $Y$  の, それぞれ部分加群であることを示そう<sup>20</sup>. 補題 1.5 と定義 1.6 で述べられたことを現在の省略された用語で言い直せば, 加群  $X$  の空でない部分集合  $S$  が, 2 条件

- $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $x_1 + x_2$  も  $S$  の元である,
- $S$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $rx$  も  $S$  の元である

をともにみたすときに  $S$  は加群となり, このとき  $S$  は  $X$  の部分加群であるというのであった.

### 補題 1.22

任意の加群  $X, Y$  と,  $X$  から  $Y$  への任意の準同型写像  $f$  に対して,  $\text{Ker } f$  は  $X$  の部分加群である.

証明. 補題 1.5 によって,  $\text{Ker } f$  の任意の元  $x_1, x_2$  について  $x_1 + x_2$  が  $\text{Ker } f$  に属することと,  $\text{Ker } f$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について  $rx$  は  $\text{Ker } f$  に属することを示せば十分である. そしてそれらはそれぞれ,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0, \\ f(rx) &= rf(x) = r0 = 0 \end{aligned}$$

によって確かめられる (最後の等号では補題 1.3(d) を用いた). □

### 補題 1.23

任意の加群  $X, Y$  と,  $X$  から  $Y$  への任意の準同型写像  $f$  に対して,  $\text{Im } f$  は  $Y$  の部分加群である.

証明. 補題 1.5 によって,  $\text{Im } f$  の任意の元  $y_1, y_2$  について,  $y_1 + y_2$  が  $\text{Im } f$  の元であることと,  $\text{Im } f$  の任意の元  $y$  と任意の係数  $r$  について,  $ry$  が  $\text{Im } f$  の元であることを示せば十分である. 前者は,  $\text{Im } f$  の定義によって  $f(x_1) = y_1$  となる  $x_1$  と  $f(x_2) = y_2$  となる  $x_2$  が存在し,

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

となり, この式の右辺が  $\text{Im } f$  の元であるので成立している. 後者は,  $\text{Im } f$  の定義によって  $y = f(x)$  となる  $x$  が存在するので

$$ry = rf(x) = f(rx)$$

となり, この式の右辺が  $\text{Im } f$  の元であるので成立している. □

核と像の包含関係によって完全列が定義される<sup>21</sup>.

**定義 1.24 (完全列).** 加群の列  $\dots, Y_{j-1}, Y_j, Y_{j+1}, \dots$  と, 準同型写像の列  $\dots, g_{j-1}, g_j, g_{j+1}, \dots$  について<sup>22</sup>, それぞれの  $g_j$  が  $Y_{j-1}$  から  $Y_j$  への準同型写像であり, 各  $j$  に対して  $\text{Im } g_j = \text{Ker } g_{j+1}$

<sup>20</sup> ただし, これらが加群であることがこの稿で用いられるのは後の第 1.7 節のことなので, 単に部分集合と思っても当座は差し支えない.

<sup>21</sup> 核と像の直後には準同型定理が述べられるのが普通という気がするが, この稿では, それはずっと後のことである.

<sup>22</sup> これらの列は, 有限であっても,  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$  のように片側が有限でもう片端が無限につらなっていても, あるいは両側に無限につらなっていても構わない.

がみたされているとき,

$$\cdots \rightarrow Y_{j-1} \xrightarrow{g_j} Y_j \xrightarrow{g_{j+1}} Y_{j+1} \rightarrow \cdots$$

は**完全列**であると言う<sup>\*23\*24</sup>.

一般的に完全列を定義したが、これ以降第7章までにおける興味の対象は実はきわめて限られていて、 $\{0\} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} Y_2$  の形のもののみである。この形の完全列を**左完全列**（より正確には**短左完全列**）と言う。別の言い方で、 $\{0\} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} Y_2$  が**左完全性**をもつと言うこともある。

**注意.**  $\{0\}$  から  $Y$  への準同型写像はゼロ写像  $0_Y^{\{0\}}$  のみである。というのは、 $f$  が  $\{0\}$  から  $Y$  への準同型写像であるとすると、定義により  $f(0) = 0$ 。 $f$  は  $\{0\}$  のすべての元を 0 へと写しているから、 $f = 0_Y^{\{0\}}$  でなければならないのである。このように唯一に確定しているので、上記で  $\{0\}$  から  $Y_0$  へ延びる矢印の上に写像を記さなかった。これは今後も省略する。

$\{0\} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} Y_2$  が完全列であることを包含の記号  $\subseteq$  を用いて表せば  $\text{Im } 0_{Y_0}^{\{0\}} \subseteq \text{Ker } g_1$ ,  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$ ,  $\text{Ker } g_1 \subseteq \text{Im } 0_{Y_0}^{\{0\}}$ ,  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  の 4 条件を同時にみたすことであるが、これらのうち最初の 1 つは不要であるとただちにわかる。すなわち、

### 系 1.25

$\{0\} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} Y_2$  が完全列であるためには、次の 3 条件すべてが成り立つことが必要十分である：

- (A)  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$ ,
- (B)  $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$ ,
- (C)  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$ .

**証明.** 必要性は明らかである。十分性は、 $\text{Im } 0_{Y_0}^{\{0\}} \subseteq \text{Ker } g_1$  を示すことによる。そしてそれは  $\text{Im } 0_{Y_0}^{\{0\}}$  の元が 0 のみであることと、 $g_1(0) = 0$  から従う。□

上記 3 条件のうち、(A) については次が成り立つ：

### 補題 1.26

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。 $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  となるには、 $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  が成り立つことが必要十分である。すなわち、次の 2 つが成り立つ<sup>\*25</sup>：

<sup>\*23</sup> すべての完全列がこの定義のように番号付けされた列であるとは限らない。おそらく、上記とは番号がひとつずれた  $\cdots \rightarrow Y_{j-1} \xrightarrow{g_{j-1}} Y_j \xrightarrow{g_j} Y_{j+1} \rightarrow \cdots$  の方が普通であるし、固有の名が付いた写像が現れるこもありうる。

<sup>\*24</sup> このように矢印を用いて準同型写像を表すことは、第3章において一般的な定義を与えられる。今はそれを紹介しないが、この記法は完全列のためだけの限定されたものだと思って読んで何の差し支えも無い。

<sup>\*25</sup> 必要性と十分性を分けて記述しているのがくどいと感じられるかもしれないが、後の第1.5節の説明のためにはこの

- (a)  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  ならば,  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$ .  
(b)  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  ならば,  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$ .

証明. (a) の証明のために,  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  と仮定する.  $Y_0$  の元  $a$  を任意に取る.  $\text{Im } g_1$  は定義により  $g_1(a)$  を含む. これと仮定を合わせれば,  $g_1(a)$  が  $\text{Ker } g_2$  に属することが従う. すなわち,  $g_2(g_1(a)) = 0$ . この式の左辺は  $(g_2 \circ g_1)(a)$  であるから  $(g_2 \circ g_1)(a) = 0$ .  $a$  は  $Y_0$  の任意の元だったので,  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$ .

次に, (b) の証明のために,  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  であると仮定する.  $\text{Im } g_1$  の任意の元  $b$  に対して,  $Y_0$  の元  $a$  で  $g_1(a) = b$  となるものが存在する.  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  なので, この  $a$  について,  $(g_2 \circ g_1)(a) = 0_{Y_2}^{Y_0}(a) = 0$ . この式の左辺は  $g_2(g_1(a)) = g_2(b)$  であるから,  $g_2(b) = 0$ . 従つて  $b$  は  $\text{Ker } g_2$  に属す.  $b$  は  $\text{Im } g_1$  の任意の元だったので,  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$ .  $\square$

以上をまとめると, 次のようになる.  $\{0\} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} Y_2$  が完全列であることを定義どおりに書けば 4 つの包含関係が得られるが, そのうちの 1 つはまったく自明であり (系 1.25), また 1 つは準同型写像の合成によって  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  と書き直すことができる (補題 1.26).

これ以上の性質は, 次節に示される定理 1.27 の証明の中から見出される.

## 1.4 主定理と最初の証明

前節までで  $\text{Hom}$  と左完全列の 2 つを紹介した. 我々の目標とする定理は, それらの両方を含む, 次のものである:

**定理 1.27** ( $\text{Hom}$  の左完全性)

$\{0\} \rightarrow N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} N_2$  が加群の完全列であるとき, 次も加群の完全列である:

$$\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2).$$

前書きに述べた<sup>\*26</sup>ように, この定理は今後何度も証明されるのであるが, その第一歩を最も素朴な<sup>\*27</sup>証明から始めよう. 系 1.25 と補題 1.26 によって,  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ ,  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の 3 つの条件を示せば十分である. 第 2 の条件のためには  $\text{Ker } f_{1*}$  の任意の元が 0 であることを, 第 3 の条件のためには  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元が  $\text{Im } f_{1*}$  に属することを, それぞれ示す.

証明. 仮定された完全性によって,  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$ ,  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$  が成り立っている. これらの条件の下,  $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$  が完全列

ように書かれている方が良い.

<sup>\*26</sup>あとで書きます.

<sup>\*27</sup>……と書いたが, 試みに本当に素朴な頃の自分自身になりきって書いたものはこれ以降の分析にそぐわなかったので, お蔵入りになった. ここに述べたのは, それに少しばかり手を入れたものである.

であることを示したい。そのためには、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ ,  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の3つの条件をそれぞれ示せば十分である（系1.25）。

(A)  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  が成り立つこと：

$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  に補題1.26(a)を適用して  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ 。これによって、

$$(f_2 \circ f_1)_* = 0_{N_2*}^{N_0}$$

が得られる。この式の左辺は  $f_{2*} \circ f_{1*}$  に等しい。というのは、 $\text{Hom}(M, N_0)$  の任意の元  $\alpha$  について

$$(f_2 \circ f_1)_*(\alpha) = (f_2 \circ f_1) \circ \alpha = f_2 \circ (f_1 \circ \alpha) = f_{2*}(f_{1*}(\alpha)) = (f_{2*} \circ f_{1*})(\alpha)$$

が成り立つためである。その一方、右辺は補題1.20によって  $0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  に等しい。以上によって  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ 。これに補題1.26(b)を適用して、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  がわかる。

(B)  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$  が成り立つこと：

$\text{Ker } f_{1*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する。 $k$  は  $\text{Ker } f_{1*}$  の定義によって、 $f_{1*}(k) = 0$  をみたす。この式の左辺は  $-_*$  の定義によって  $f_1 \circ k$  であり、右辺は系1.17によって  $0_{N_1}^M$  であるから、

$$f_1 \circ k = 0_{N_1}^M.$$

この式は、 $M$  の各元  $m$  に対してそのみたすべき条件  $f_1(k(m)) = 0$  を課す。これは  $k(m)$  が  $\text{Ker } f_1$  に属することを意味し、それと  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  を合わせると、 $k(m) = 0$  が従う。 $M$  の任意の元  $m$  に対してこれが成り立つことは、 $k = 0_{N_0}^M$  を意味する。これと系1.17によって、 $k = 0$ 。

$k$  は  $\text{Ker } f_{1*}$  の任意の元だったので、 $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ 。

(C)  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が成り立つこと：

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する。 $k$  は、 $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって、

$$f_{2*}(k) = 0$$

をみたす。この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ k$  であり、右辺は系1.17によって  $0_{N_2}^M$  であるから、

$$f_2 \circ k = 0_{N_2}^M.$$

この式は、 $M$  の各元  $m$  に対してそのみたすべき条件  $f_2(k(m)) = 0$  を課す。これは  $k(m)$  が  $\text{Ker } f_2$  に属することを意味し、それと  $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$  を合わせると、 $k(m)$  が  $\text{Im } f_1$  に属することが従う。それゆえに、

$$f_1(x) = k(m)$$

なる  $N_0$  の元  $x$  が存在する。そのような  $x$  を1つ選ぶ<sup>\*28</sup>。

---

<sup>\*28</sup> この  $x$  が選択の余地無く決まることも示せる。

$M$  の元  $m$  ごとに上に述べた  $x$  を選択することは、 $M$  から  $N_0$  への、 $m$  を  $x$  に写す写像  $\alpha$  の選択を意味する<sup>\*29\*30</sup>。このとき  $\alpha$  は、 $M$  の任意の元  $m$  について

$$f_1(\alpha(m)) = k(m)$$

をみたすのであり、これは  $f_1 \circ \alpha = k$  を意味する。この  $\alpha$  が準同型写像であることを示そう。加法に関する条件は、 $f_1$  と  $k$  が準同型写像であることによつて、 $M$  の任意の元  $m_1, m_2$  について

$$\begin{aligned} f_1(\alpha(m_1 + m_2) - \alpha(m_1) - \alpha(m_2)) &= f_1(\alpha(m_1 + m_2)) - f_1(\alpha(m_1)) - f_1(\alpha(m_2)) \\ &= k(m_1 + m_2) - k(m_1) - k(m_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち、これと  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  によって、 $\alpha(m_1 + m_2) - \alpha(m_1) - \alpha(m_2) = 0$  が言えるから成立している。作用に関する条件も、 $f_1$  と  $k$  が準同型写像であることによつて、 $M$  の任意の元  $m$  と任意の係数  $r$  に対して

$$f_1(\alpha(rm) - r\alpha(m)) = f_1(\alpha(rm)) - rf_1(\alpha(m)) = k(rm) - rk(m) = 0$$

が成り立ち、これと  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  によって、 $\alpha(rm) - r\alpha(m) = 0$  が言えるから成立している。

以上によつて、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = k$  をみたすものが存在することがわかつた。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で  $f_{1*}(\alpha) = k$  をみたすものが存在する。この式の左辺は  $\text{Im } f_{1*}$  に属するので、右辺の  $k$  も  $\text{Im } f_{1*}$  に属する。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから、これで  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された。

以上によつて  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ 、 $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ 、 $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の 3 条件がすべて示されたので、系 1.25 の適用によつて  $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$  は完全列である。□

このように、定理 1.27 の最初の証明が得られた。証明全体の概観としては  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$ 、 $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$ 、 $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$  の前提側の 3 条件から  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ 、 $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ 、 $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の結論側の 3 条件を導いている。証明を

- (A)  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  を証明する部分,
- (B)  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$  を証明する部分,
- (C)  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  を証明する部分

の 3 つに分けて見ると、それぞれには前提の 3 条件すべては用いられておらず、(A) には  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  のみが、(B) には  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  のみが、そして (C) には  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  と  $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$  のみが用いられてそれぞれの結論に至っている。

<sup>\*29</sup> ここで選択公理を用いた。前注に述べたように  $x$  が一意に定まるることを示したなら、選択公理無しに一意に定まる。

<sup>\*30</sup>  $x$  は  $m$  だけでなく  $k$  にも依存する（ので  $\alpha$  は  $k$  に依存する）が、 $k$  への依存は明示しなくても証明に支障無いので、ここでは省略している。のちに、明示して  $Q(k)$  と書かれる。

この証明から  $\text{Hom}(M, -)$  の性質と左完全列の性質を分離したい。ここで、 $\text{Hom}(M, -)$  の性質というのは第 1.2 節で紹介した物事であり、左完全列の性質というのは第 1.3 節で紹介した物事である。証明を書き直すたびに新しい補題が生まれ、定理 1.27 の証明は短くなることだろう。

## 1.5 証明から補題を切り出す

我々は今後何度も、そのそれぞれの時点での定理 1.27 の証明の中から補題化に適した部分を見つけること、その部分を一般化して補題の形で述べ直すこと、そして定理 1.27 の証明をその補題を適用した形に書き直すことを繰り返す。そのとき、一般化された補題として記述するとはどのようにすれば良いだろうか？ そして補題化するべき部分をどのように決めれば良いだろうか？

前節で得られた定理 1.27 の証明の (A) の部分は、定理の前提 3 条件のうち  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  のみから  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  に至るものであり、その冒頭は補題 1.26 (a) を、末尾は (b) をそれぞれ適用する形で書かれていた。もしも補題 1.26 が存在しなかつたならば、それらはどのように書かれただろうか。先述の 2 つの疑問に回答する前に、この架空の証明を書き表して前節で得られた実在の証明と比較することからこの節を始めよう<sup>\*31</sup>。

説明のために、(A) を、 $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$  と  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  の 2 式を境目に 3 つの小部分に分割して、

- (A1) 前提  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  から  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$  を導く部分、
- (A2)  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$  から  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  を導く部分、
- (A3)  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  から結論  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  を導く部分

と番号を付ける。前節に得られた証明では、(A1) とは

$$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2 \text{ に補題 1.26 (a) を適用して } f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}.$$

と、補題 1.26 (a) の適用によって短く済ませられた小部分であった。今は、定理 1.27 が初めて述べられた際にはその補題が存在していなかったという（現実に反した）仮定を置く。この仮定の下で (A1) は、現実の (A1) に補題 1.26 (a) の証明を埋め込んだ形の、

$N_0$  の元  $x$  を任意に取る。 $\text{Im } f_1$  は定義により  $f_1(x)$  を含む。これと  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  を合わせれば、 $f_1(x)$  が  $\text{Ker } f_2$  に属することが従う。すなわち、 $f_2(f_1(x)) = 0$ 。この式の左辺は  $(f_2 \circ f_1)(x)$  であるから  $(f_2 \circ f_1)(x) = 0$ 。 $x$  は  $N_0$  の任意の元だったので、 $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ 。

というふうなものだったことだろう<sup>\*32</sup>。我々の仮定の下では、この架空の証明は定理 1.27 が初めて述べられた直後に存在し、そこに補題 1.26 (a) という改良が加えられた後に現実の (A1) が得ら

<sup>\*31</sup> 今后、証明の中から  $\text{Hom}(M, -)$  の性質と左完全列の性質を分離するのに先立って、この架空の原証明と“最初の”証明を、言わば過去の証明と現在の証明を見比べることで将来への手掛かりを得たいのである。

<sup>\*32</sup> ただし、このままの順番で並べてみると、そんな証明を書く人がいるとはちょっと信じられない感じのものになってしまいうのだが。

れるわけである。

架空の (A1) と現実の (A1) を詳しく見比べて、第 1 の疑問、既に存在する証明から切り出した部分をどのように補題化すれば良いか、に答える手掛かりを見つけよう。上記の架空の (A1) の証明は、

- その結論である  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$  を導くために、
- その外部の知識  $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  を用いる

ものであり、

- $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  のほかには  $\text{Im}$  や  $\text{Ker}$  や合成写像。 $\circ$  という概念の定義そのものしか用いていない

という特徴がある。それゆえに、そこに出現する文字を書き換えれば、 $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  をみたす一般の準同型写像  $g_1, g_2$  について  $g_2 \circ g_1 = 0$  が成り立つことを主張する補題とその証明ができるだろう。そのようにして、この部分を定理 1.27 の証明から独立させることができる：

### 補題 1.26 (a) (再掲)

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。このとき、 $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  となるには、 $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  が成り立つことが必要である。

証明.  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  と仮定する。 $Y_0$  の元  $a$  を任意に取る。 $\text{Im } g_1$  は定義により  $g_1(a)$  を含む。

これと仮定を合わせれば、 $g_1(a)$  が  $\text{Ker } g_2$  に属することが従う。すなわち、 $g_2(g_1(a)) = 0$ 。

この式の左辺は  $(g_2 \circ g_1)(a)$  であるから  $(g_2 \circ g_1)(a) = 0$ .  $a$  は  $Y_0$  の任意の元だったので、 $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$ .  $\square$

このように、補題 1.26 (a) とは架空の証明の (A) の一般性をもつ小部分 (A1) を切り出して補題として述べ直すことによって得られたものであると考えることができる。現実の我々が前節で得ていた

$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  に補題 1.26 (a) を適用して  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ .

という記述は、架空の原証明を、補題 1.26 (a) を適用する形に書き直したものであると考えることができる。実際には補題 1.26 は定理 1.27 に先立って、そのような経緯によらずに存在していたわけだが、架空の状況と架空の原証明を想定することによって、補題 1.26 (a) をそのように解釈できるのである。

切り出した部分をどのように補題化するのかという問い合わせる前にもう 1 つ、(A3) についても同じことをしよう。もしも補題 1.26 (b) が存在しなかつたならば、架空の (A3) は

$\text{Im } f_{1*}$  の任意の元  $\beta$  に対して、 $\text{Hom}(M, N_0)$  の元  $\alpha$  で  $f_{1*}(\alpha) = \beta$  となるものが存在する。 $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  なので、この  $\alpha$  について、 $(f_{2*} \circ f_{1*})(\alpha) = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}(\alpha) = 0$ 。この式の左辺は  $f_{2*}(f_{1*}(\alpha)) = f_{2*}(\beta)$  であるから、 $f_{2*}(\beta) = 0$ 。従って  $\beta$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  に属

す.  $\beta$  は  $\text{Im } f_{1*}$  の任意の元だったので,  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ .

というふうなものだったことだろう. ここには  $f_{1*}$  や  $\text{Hom}(M, N_0)$  なども出現しているが, それら特有の性質は証明に影響を与えていないため,

- その結論である  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  に至るまでに,
- その外部で示された知識として  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0$  を用いており,
- ほかに用いているのは定義ばかりである

と言える. (A3) の置かれた状況は (A1) よりも複雑であったが,  $g_2 \circ g_1 = 0$  をみたす一般の  $g_1, g_2$  についての補題として切り出される.

### 補題 1.26 (b) (再掲)

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし,  $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像,  $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする.  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$  となるには,  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  が成り立つことが十分である.

証明.  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  であると仮定する.  $\text{Im } g_1$  の任意の元  $b$  に対して,  $Y_0$  の元  $a$  で  $g_1(a) = b$  となるものが存在する.  $g_2 \circ g_1 = 0_{Y_2}^{Y_0}$  なので, この  $a$  について,  $(g_2 \circ g_1)(a) = 0_{Y_2}^{Y_0}(a) = 0$ . この式の左辺は  $g_2(g_1(a)) = g_2(b)$  であるから,  $g_2(b) = 0$ . 従って  $b$  は  $\text{Ker } g_2$  に属す.  $b$  は  $\text{Im } g_1$  の任意の元だったので,  $\text{Im } g_1 \subseteq \text{Ker } g_2$ .  $\square$

もしも架空の (A3) が先に存在していたならば, このようにしてできたのが補題 1.26 (b) であると考えることができる.

以上 2 例から一般化して言えば, 定理 1.27 の既存の証明の一部を切り取った後に, その部分が

- 何を結論としていて,
- 何を外部の知識として用いているのか

を洗い出し, そうして得られた情報を元に, 後者を前提として前者を結論する補題の形で一般化するのである. その結果として, その部分はその補題の証明へと移植され, 定理 1.27 の証明はその補題を適用する短い形に書き直される. このように第 1 の疑問への回答は, この稿に限らない, 証明の一部を切り出して補題化すること全般についての半自動化された<sup>\*33</sup>加工法として得られる.

その一方, 補題として切り出す部分をどのように決めるかという第 2 の疑問には, 一般的な回答を与えることはできない. 切り出す部分は論理だけでは決まらないのである. そこで我々は, 定理 1.27 の証明から  $\text{Hom}$  と左完全列の性質を補題として分離することを目標に, 今後に切り出す補題のそれぞれはそれら 2 つの一方のみを反映し, しかもその限りでなるべく長くなるように<sup>\*34</sup>切り出す部分を決定することにしよう. その良い例が (A2) である:

<sup>\*33</sup> 完全には自動化されない. 補題 1.33 の注を参照のこと.

<sup>\*34</sup> この「なるべく長くなるように」も完全に自動的というわけにはいかず, 別の判断が必要になる事態もあり得る.

この式の左辺は  $f_{2*} \circ f_{1*}$  に等しい。というのは、 $\text{Hom}(M, N_0)$  の任意の元  $\alpha$  について

$$(f_2 \circ f_1)_*(\alpha) = (f_2 \circ f_1) \circ \alpha = f_2 \circ (f_1 \circ \alpha) = f_{2*}(f_{1*}(\alpha)) = (f_{2*} \circ f_{1*})(\alpha)$$

が成り立つためである。

(A2) は  $\text{Hom}(M, -)$  の性質を用いている。この部分を補題として切り出そう。

### 補題 1.28

$Y, Y', Y''$  は加群であるとする。 $Y$  から  $Y'$  への任意の準同型写像  $g$  と  $Y'$  から  $Y''$  への任意の準同型写像  $g'$  について、 $(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*$  が成り立つ<sup>35</sup>。

証明。 $\text{Hom}(M, Y)$  の任意の元  $\alpha$  について

$$(g' \circ g)_*(\alpha) = (g' \circ g) \circ \alpha = g' \circ (g \circ \alpha) = g'_*(g_*(\alpha)) = (g'_* \circ g_*)(\alpha)$$

が成り立つので、 $(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*$ 。□

(A) は次のように、(補題 1.26 に加えて) この補題も適用する形に書き換えられる：

$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  に補題 1.26 (a) を適用して  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ 。これによって、

$$(f_2 \circ f_1)_* = 0_{N_2*}^{N_0}$$

が得られる。この式の左辺は補題 1.28 によって  $f_{2*} \circ f_{1*}$  に等しく、右辺は補題 1.20 によつて  $0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  に等しい。以上によって  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ 。これに補題 1.26 (b) を適用して、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  がわかる。

今後はこの成功例を参考に、 $\text{Hom}$  の性質と左完全性のどちらかしか含まない範囲で補題化する。

(B) や (C) もいくつかの部分に、そしてそのそれそれが  $\text{Hom}(M, -)$  の性質か左完全列の性質の一方のみが反映されているように分割して、補題を切り出したい。まずは、(C) の中央部分 ( $f_2 \circ k = 0_{N_2}^M$  から  $f_1 \circ \alpha = k$  となる  $\alpha$  の存在まで) を、左完全列の性質についての補題として分離しておこう<sup>36</sup>。そこに  $\text{Hom}(M, -)$  に由来する  $k$  が出現しているもののその性質は証明の道具としては用いられていない。道具として用いられているのは左完全列の性質であって、 $\text{Hom}(M, -)$  の性質は用いられないことを確認できるのである。

### 補題 1.29

$Y_0, Y_1, Y_2$  が加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への、どちらも準同型写像であるとする。このとき、 $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$  と  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が同時にみたされるには、任意の加群

<sup>35</sup> 証明の一部を補題化する際、それが  $\text{Hom}(M, -)$  の性質と見なせるときには下付きの添字を、左完全列の性質と見なせるときには上付きの'を用いるという方針で書き分けている。

<sup>36</sup> 次章においてこの部分の前後を改良する。実は、それを持ってから今から行う補題化を行っても大した問題は起こらない。その意味ではこのタイミングでなくても構わないのだが、この部分の証明が長くて (C) 全体を見渡すのが大変なので、今のうちに補題として分離してしまって見やすくしておこうというのである。

$Z$  と  $g_2 \circ h = 0_{Y_2}^Z$  をみたす  $Z$  から  $Y_1$  への任意の準同型写像  $h$  について,  $Z$  から  $Y_0$  への準同型写像  $\bar{h}$  で  $g_1 \circ \bar{h} = h$  をみたすものが存在することが必要である.

証明.  $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$  と  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が同時にみたされていると仮定する. 与えられた  $h$  の条件  $g_2 \circ h = 0_{Y_2}^Z$  は,  $Z$  の各元  $z$  に対してそのみたすべき条件  $g_2(h(z)) = 0$  を課す. これは  $h(z)$  が  $\text{Ker } g_2$  に属することを意味し, それと仮定された  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  を合わせると,  $h(z)$  が  $\text{Im } g_1$  に属することが従う. それゆえに,

$$g_1(a) = h(z)$$

なる  $Y_0$  の元  $a$  が存在する. そのような  $a$  を 1 つ選ぶ.

$Z$  の元  $z$  ごとに上に述べた  $a$  を選択することは,  $Z$  から  $Y_0$  への,  $z$  を  $a$  に写す写像  $\bar{h}$  の選択を意味する. このとき  $\bar{h}$  は,  $Z$  の任意の元  $z$  について

$$g_1(\bar{h}(z)) = h(z)$$

をみたすのであり, これは  $g_1 \circ \bar{h} = h$  を意味する. この  $\bar{h}$  が準同型写像であることを示そう. 加法に関する条件は,  $g_1$  と  $h$  が準同型写像であることによって,  $Z$  の任意の元  $z_1, z_2$  について

$$\begin{aligned} g_1(\bar{h}(z_1 + z_2) - \bar{h}(z_1) - \bar{h}(z_2)) &= g_1(\bar{h}(z_1 + z_2)) - g_1(\bar{h}(z_1)) - g_1(\bar{h}(z_2)) \\ &= h(z_1 + z_2) - h(z_1) - h(z_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち, これと仮定された  $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$  によって,  $\bar{h}(z_1 + z_2) - \bar{h}(z_1) - \bar{h}(z_2) = 0$  が言えるから成立している. 作用に関する条件も,  $g_1$  と  $h$  が準同型写像であることによって,  $Z$  の任意の元  $z$  と任意の係数  $r$  に対して

$$g_1(\bar{h}(rz) - r\bar{h}(z)) = g_1(\bar{h}(rz)) - r g_1(\bar{h}(z)) = h(rz) - r h(z) = 0$$

が成り立ち, これと仮定された  $\text{Ker } g_1 \subseteq \{0\}$  によって,  $\bar{h}(rz) - r\bar{h}(z) = 0$  が言えるから成立している.

以上によって,  $Z$  から  $Y_0$  へのある準同型写像  $\bar{h}$  で  $g_1 \circ \bar{h} = h$  をみたすものが存在することがわかった.  $\square$

(C) は, この補題を適用する形に書き換えた後にはずいぶん短くなる. 大部分をこの補題の証明が引き受けたのである :

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する.  $k$  は,  $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって,

$$f_{2*}(k) = 0 \tag{\star}$$

をみたす. この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ k$  であり, 右辺は系 1.17 によって  $0_{N_2}^M$  であるから,

$$f_2 \circ k = 0_{N_2}^M.$$

このとき、補題 1.29 によって、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = k$  をみたすものが存在することがわかる。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = k \quad (\star\star)$$

をみたすものが存在する。この式の左辺は  $\text{Im } f_{1*}$  に属するので、右辺の  $k$  も  $\text{Im } f_{1*}$  に属する。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから、これで  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された。

この書き換えによって、(C) は全体を見渡せる程度の長さに収まった。 $(\star)$  と  $(\star\star)$  の印をつけた 2 式は、 $\text{Hom}(M, -)$  の性質が用いられている部分の前後の境目である。 $(\star)$  の前や  $(\star\star)$  の後では左完全列の性質のみが用いられていて、 $\text{Hom}(M, -)$  の性質は用いられていない。今後の改良の際の目印となる。

ここまで、既に存在している証明から切り出す部分を決め、補題の形で記述し直すという一般的な方法論によつていくつかの補題を導入した。定理 1.27 の最初の証明が（あるいはそれ以前に得られていたと仮想した架空の証明が）この方法論に適するように既に整備されていることが暗黙の前提であり、そのような部分ばかりを扱っていたのである。そのような部分をあらかじめ見てしまつた今、整備の足りない部分を見てみよう。上に示した (C) の  $(\star\star)$  をみたす  $\alpha$  の存在以降の部分は、 $k$  さえ上手く処理できれば、条件をみたせば  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が成り立つ、という形の補題として切り出せそうである。そして直感的には、それは次のように書かれるように思われる：

### 補題 1.30

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像であり、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。 $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が成り立つには、 $\text{Ker } g_2$  の任意の元  $k$  に対して  $Y_0$  の元  $a$  で  $g_1(a) = k$  をみたすものが存在すれば十分である。

証明。 $\text{Ker } g_2$  の任意の元  $k$  に対して  $Y_0$  の元  $a$  で  $g_1(a) = k$  をみたすものが存在すると仮定する。

$\text{Ker } g_2$  の元  $k$  を任意に取る。この  $k$  に対して、上記の  $a$  が存在して、 $g_1(a) = k$  が成り立つ。この式の左辺は  $\text{Im } g_1$  の元であるから、右辺の  $k$  もまた  $\text{Im } g_1$  の元である。

$k$  は  $\text{Ker } g_2$  の任意の元であるから、 $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$ 。  $\square$

この補題は、十分条件が不格好であるという不満点はあるものの、その証明は正しい。そして、それを切り出した後の (C) は次のようになるだろう：

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する。 $k$  は、 $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって、

$$f_{2*}(k) = 0 \quad (\star)$$

をみたす。この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ k$  であり、右辺は系 1.17 によって  $0_{N_2}^M$  であるから、

$$f_2 \circ k = 0_{N_2}^M.$$

このとき、補題 1.29 によって、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = k$  をみたすものが存在することがわかる。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = k \quad (\star\star)$$

をみたすものが存在する。 $k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから、補題 1.30 を適用できて、 $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された。

この書き換えでは、元の証明で (C) を貫いて使用されていた変数  $k$  を新たな証明では途中で打ち切る一方で、新しい補題 1.30 の条件「 $\text{Ker } g_2$  の任意の元  $k$  に対して  $Y_0$  の元  $\alpha$  で  $g_1(\alpha) = k$  をみたすものが存在する」の中に入れて引き継いでいる。このような扱いはこれまでに (A) や (C) で補題を切り出す際には無かったことであり、その正当性を、現在の我々の手持ちの道具では判定できない。 $(\star\star)$  の周辺を整備し直して正当性に確証を得るのが、次節の課題である<sup>\*37</sup>。

## 1.6 変数の論理

この節では、前節の最後で行われた書き換えに正当性を与えるために、 $(\star\star)$  の周辺を補題 1.30 を切り出すにふさわしい形に整備する。書き換え直前には (C) はこのようであった：

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する。

$k$  は、 $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって、

$$f_{2*}(k) = 0$$

をみたす。この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ k$  であり、右辺は系 1.17 によつて  $0_{N_2}^M$  であるから、 $f_2 \circ k = 0_{N_2}^M$ 。

このとき、補題 1.29 によって、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = k$  をみたすものが存在することがわかる。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = k \quad (\star\star)$$

をみたすものが存在する。この式の左辺は  $\text{Im } f_{1*}$  に属するので、右辺の  $k$  も  $\text{Im } f_{1*}$  に属する。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから、これで  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された。

ただし、証明の構造を見やすくするために変数  $k$  の登場する部分をインデントした。

この節の関心は  $(\star\star)$  付近のみにあるので、証明の内部をほとんど読み取らずに、インデント内部は  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  から  $(\star\star)$  をみたす  $\alpha$  の存在を導く断片と、その  $\alpha$  の存在から  $k \in \text{Im } f_{1*}$  を導くはたらきをもつ断片をつなげてできていると粗く見る。この節だけの用語として、それらの断

---

<sup>\*37</sup> とは書いたものの、補題 1.30 を切り出す程度のことは、特段の論証無くできるというのが実際のところかもしれない。あるいは、次々節の包含写像による書き換えの方が馴染みがあるという読者もいるだろう。<sup>\*48</sup> も参照のこと。

片をそれぞれ FRAG1, FRAG2 と呼び, インデント内部全体は両者をつなげたものと見て  $\text{FRAG1} \mid \text{FRAG2}$  と書き表す. これは,  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  から  $k \in \text{Im } f_{1*}$  を導くはたらきをもつ.  $\text{FRAG1} \mid \text{FRAG2}$  を「 $\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取る.」と「 $k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから, これで  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された.」で挟んだものが, (C) 全体である.

上に挙げたような証明の断片を総称して**証明片**と呼ぶ(これもこの節だけの用語である). ある証明片が論理式  $\Delta(k)$  をみたす範囲に制限された変数  $k$  を用いて前提  $A(k)$  から結論  $B(k)$  を導く状況を考える. 現在の興味の範囲では, 証明片とは FRAG1, FRAG2, あるいは  $\text{FRAG1} \mid \text{FRAG2}$  である. これらに限ったとき,  $\Delta(k)$  とは  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  のことであり, 前提  $A(k)$  と結論  $B(k)$  の対は次の表に示す 3 対に限られている:

	前提 $A(k)$	結論 $B(k)$
FRAG1	$k \in \text{Ker } f_{2*}$	$\exists \alpha \in \text{Hom}(M, N_0) (f_{1*}(\alpha) = k)$
FRAG2	$\exists \alpha \in \text{Hom}(M, N_0) (f_{1*}(\alpha) = k)$	$k \in \text{Im } f_{1*}$
$\text{FRAG1} \mid \text{FRAG2}$	$k \in \text{Ker } f_{2*}$	$k \in \text{Im } f_{1*}$

例えば証明片が FRAG1 ならば  $A(k)$  は  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  を,  $B(k)$  は  $f_{1*}(\alpha) = k$  をみたすような  $\text{Hom}(M, N_0)$  の元  $\alpha$  の存在を, それぞれ指すわけである.

このような証明片は, 上記 3 例に限らず一般に, 「 $\Delta(k)$  をみたす  $k$  を任意に取る. この  $k$  に  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  を適用すると,  $A(k)$  が成り立つ.」と「 $k$  は  $\Delta(k)$  をみたす範囲で任意だったから, これで  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  が示された.」でその前後を挟む加工を施した後には,  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  を前提に  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  を結論する新たな証明片となる<sup>\*38</sup>. 細かく言えば, この加工は,

- (i) 証明片の先頭に「 $\Delta(k)$  をみたす  $k$  を任意に取る. この  $k$  に  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  を適用すると,  $A(k)$  が成り立つ.」を書き加える.
- (ii) 手順 (i) が済んだ証明片<sup>\*39</sup>の末尾に「 $k$  は  $\Delta(k)$  をみたす範囲で任意だったから, これで  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  が示された.」を書き加える.

の 2 つの手順によって説明できる<sup>\*40</sup>.  $A(k)$  を前提に  $B(k)$  を結論する証明片が手順 (i) の後には  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  と  $\Delta(k)$  を前提に  $B(k)$  を結論する証明片となり, それをさらに手順 (ii) で加工すると  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  を前提に  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  を結論する証明片ができるのである.

この一連の工程によって, 現在の興味の対象である FRAG1, FRAG2,  $\text{FRAG1} \mid \text{FRAG2}$  を加工することを考える. この加工を  $\forall k ( \quad )$  で示して, 例えば加工された後の FRAG1 なら  $\forall k (\text{FRAG1})$  のように書くことしよう. 先述のとおり, 3 つのどの証明片でも  $\Delta(k)$  は  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  であり,

<sup>\*38</sup> 元の断片が前後の他の部分を整合していたとして, この加工の後にその整合性が保たれる保証は無い. 後を読めばわかるよう, そのような使い方を想定していないのである.

<sup>\*39</sup> 手順 (i) 加工前には, この手順 (ii) は実行できない. 仮定  $A(k)$  の中の  $k$  の出現が量化子によって束縛されていないからである.

<sup>\*40</sup> 付録(あとで書きます)を参照.

- FRAG1 や FRAG1 + FRAG2 を加工する際には、前提  $A(k)$  は  $k \in \text{Ker } f_{2*}$  であり、これは  $\Delta(k)$  と同一である。この場合には加工後の前提  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  は恒真であり、手順 (i) で書き加える文章は単に「 $k \in \text{Ker } f_{2*}$  をみたす  $k$  を任意に取る。」でよい。
- FRAG1 の加工後の結論  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  は、 $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  に対して  $\text{Hom}(M, N_0)$  の元  $\alpha$  で  $f_{1*}(\alpha) = k$  をみたすものが存在することである。
- FRAG2 の加工後の前提  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$  も上と同じである。
- FRAG2 や FRAG1 + FRAG2 を加工する際には、結論  $B(k)$  は  $k \in \text{Im } f_{1*}$  であるので、加工後の結論  $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$  は  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  である。

	前提 $\forall k (\Delta(k) \rightarrow A(k))$	結論 $\forall k (\Delta(k) \rightarrow B(k))$
$\forall k (\text{FRAG1})$	恒真	$\forall k \in \text{Ker } f_{2*} (\exists \alpha \dots)$
$\forall k (\text{FRAG2})$	$\forall k \in \text{Ker } f_{2*} (\exists \alpha \dots)$	$\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$
$\forall k (\text{FRAG1} + \text{FRAG2})$	恒真	$\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$

$\forall k (\text{FRAG2})$  の結論と  $\forall k (\text{FRAG2})$  の前提は一致しているから、それらの合併  $\forall k (\text{FRAG1}) + \forall k (\text{FRAG2})$  を考えることができる。それは無前提に結論  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  を導くものであり、旧来の (C)，すなわち  $\forall k (\text{FRAG1} + \text{FRAG2})$  と同等の働きをもつ証明であることがわかる。こうして、我々は新しい (C) を得たことになる：

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取る。

$k$  は、 $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって、

$$f_{2*}(k) = 0$$

をみたす。この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ k$  であり、右辺は系 1.17 によつて  $0_{N_2}^M$  であるから、

$$f_2 \circ k = 0_{N_2}^M.$$

このとき、補題 1.29 によって、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = k$  をみたすものが存在することがわかる。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = k \tag{☆☆}$$

をみたすものが存在する。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから、以上によって  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  に対して  $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で  $f_{1*}(\alpha) = k$  をみたすものが存在することが示された。

再び  $\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取る。

この  $k$  に上を適用できて、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  が存在して

$$f_{1*}(\alpha) = k$$

をみたす。この式の左辺は  $\text{Im } f_{1*}$  に属するので、右辺の  $k$  も  $\text{Im } f_{1*}$  に属する。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったから  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が示された.

この加工後の末尾部（「再び」以降の部分）は、そこでの  $k$  の出現のすべてを別の未使用の文字に置き換えたとしても証明が損なわれないという性質をもつ。この意味で、それ以外の部分と縁が切れたとでも言うべき状態になっており、もはやほかの補題を切り出したのと同じように補題 1.30 を切り出しても何の問題も生じない。再掲しよう（補題の証明は省略した）。

### 補題 1.30（再掲）

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像であり、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。 $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が成り立つには、 $\text{Ker } g_2$  の任意の元  $k$  に対して  $Y_0$  の元  $a$  で  $g_1(a) = k$  をみたすものが存在すれば十分である。

このようにして我々は確信を得て前節の最後に戻ることができる。この節で説明した方法には汎用性があり、次節で再度用いられる（補題 1.34）。

## 1.7 包含写像

前々節の終わりに、(C) の末尾から補題 1.30 を切り出した。その正当性は前節に検証されたが、この補題の十分条件がほかの補題に比べてすっきり書かれていらないという課題はまだ残されている。この節では、**包含写像**の導入によってそれを解決し、次いで(C) の冒頭からもう 1 つの補題を切り出す。

以下に述べるように、包含写像は、ある集合が別の集合の部分集合であるときに<sup>\*41</sup>、前者から後者への写像として定義され、両者が部分加群の関係にあるときにはそれは準同型写像である：

**定義 1.31** (包含写像)。 $X$  が集合であり  $S$  がその部分集合であるとする。 $S$  から  $X$  への写像  $j$  が**包含写像**であるとは、 $S$  の任意の元をそれ自身へと写すこと、すなわち、 $S$  の任意の元  $x$  について  $j(x) = x$  が成り立つことを言う。

### 補題 1.32

$X$  が加群であり  $S$  がその部分加群であるとき、 $S$  から  $X$  への包含写像は準同型写像である。

証明。包含写像を  $j$  とする。 $S$  の任意の元  $x_1, x_2$  について、 $j(x_1 + x_2)$  と  $j(x_1) + j(x_2)$  のどちらも包含写像の定義によって  $x_1 + x_2$  であるから、 $j(x_1 + x_2) = j(x_1) + j(x_2)$ 。 $S$  の任意の元  $x$  と任意の係数  $r$  について、 $j(rx)$  と  $rj(x)$  のどちらも包含写像の定義によって  $rx$  であるから、 $j(rx) = rj(x)$ 。これらは  $j$  が準同型写像であることを意味する。□

今、(C)を考えるに際しては、 $X$  とは  $\text{Hom}(M, N_1)$  であり、 $S$  とは  $\text{Ker } f_{2*}$  である<sup>\*42</sup>。これまでの証明における  $k$  の出現のうち、あるものは前者の元としての、またあるものは後者の元としての

<sup>\*41</sup> この 2 つの集合は同一であっても構わない。任意の集合は自分自身の部分集合である。

<sup>\*42</sup> あるいは、(C) から切り離して一般的に記述された補題 1.30 を考えるなら、それぞれ  $Y_1$  と  $\text{Ker } g_2$  である。

働きをもつ<sup>\*43</sup>. 後者から前者への包含写像を  $\iota$  と書くことにすると、前者の元として出現している  $k$  はすべて  $\iota(k)$  と書き直される。

この包含写像の導入は、補題 1.30 を適用する直前において特に良い効果をもたらす。もう 1 つの（包含写像とは無関係な）改良と組み合わせることで、 $\text{Hom}(M, N_1)$  における等式である (☆☆) が  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  について成立することを、 $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_1)$  への写像の相等に言い換えられるからである。まずは前節までの証明を見よう。そこでは  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  に対して、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = k \quad (\star\star)$$

をみたすものが存在することが示されていた。

この式の左辺が  $\text{Hom}(M, N_1)$  の元である（というのは、 $f_{1*}$  が  $\text{Hom}(M, N_1)$  への写像であるためである）のだから、右辺もそうであると考えるべきである。従って、包含写像を明示する今ではそれは  $\iota(k)$  と書かれる。一方、左辺は包含写像とはまったく無関係な別の理由によって書き換えられる。 $\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  ごとに  $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  が存在することを、 $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_0)$  へのある写像  $Q$  の存在として書き直すことができるためである<sup>\*44</sup>。このとき、 $\alpha$  は  $Q(k)$  と書かれる。以上の新たな記法を合わせて、(☆☆) は

$$f_{1*}(Q(k)) = \iota(k)$$

と書き直される。そして、この  $\text{Hom}(M, N_1)$  における等式が  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  について成立することは、 $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_1)$  への写像の等式

$$f_{1*} \circ Q = \iota$$

を意味する。 $k$  ごとに (☆☆) をみたす  $\alpha$  が存在することは、これをみたす  $Q$  の存在を導く。

逆に、 $f_{1*} \circ Q = \iota$  が成り立っているときに、 $\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  ごとに  $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で (☆☆) をみたすものの存在を導くことは、 $\alpha = Q(k)$  と定めることによってすぐにできる。つまり、 $Q$  の存在と  $k$  ごとの  $\alpha$  の存在を互いに読み替えることができる。前々節の終わりに  $k$  ごとの  $\alpha$  の存在を条件とした補題 1.30 を得ていたのに代えて、この  $Q$  の存在を条件とする新たな補題が得られる：

### 補題 1.33

$Y_0, Y_1, Y_2$  は加群であるとし、 $g_1$  は  $Y_0$  から  $Y_1$  への準同型写像であり、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。 $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が成り立つには、 $\text{Ker } g_2$  から  $Y_0$  へのある写像  $\bar{j}$  で  $g_1 \circ \bar{j}$  が  $\text{Ker } g_2$  から  $Y_1$  への包含写像と一致するものが存在すれば十分である<sup>\*45</sup>。

---

\*43 最初の出現のみが後者であり、ほかはすべて前者であることがわかる。

\*44 ここでも選択公理を用いる。

\*45  $\text{Ker } g_2$  に限らない  $Y_1$  の一般の部分加群についてこの補題とまったく同様の主張が成立し、それも同じように証明できる。補題 1.33 の代わりに、それを  $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_1)$  への包含写像に適用しても良い。

証明.  $\text{Ker } g_2$  から  $Y_1$  への包含写像を  $j$  とし,  $\text{Ker } g_2$  から  $Y_0$  への準同型写像  $\bar{j}$  で  $g_1 \circ \bar{j} = j$  をみたすものが存在すると仮定する.  $\text{Ker } g_2$  の元  $k$  を任意に取る. このとき,  $g_1(\bar{j}(k)) = (g_1 \circ \bar{j})(k) = j(k)$ . この式の左辺は  $\text{Im } g_1$  に属するので, 右辺の  $j(k)$  も  $\text{Im } g_1$  に属する.  $j$  は包含写像だから, これは  $k$  が  $\text{Im } g_1$  に属することを意味する.

$k$  は  $\text{Ker } g_2$  の任意の元だったから,  $\text{Ker } g_2 \subseteq \text{Im } g_1$  が示された.  $\square$

(☆☆) の周辺での包含写像の導入 (と,  $k$  ごとの  $\alpha$  の存在を  $Q$  の存在に書き換えること) によつて, 補題 1.30 は完全に補題 1.33 で代替される<sup>\*46</sup>.

包含写像  $\iota$  を用いて書き直される<sup>\*47</sup>のは, (☆☆) 周辺だけに限らず (C) の全体に及ぶ. 包含写像無しで書かれた証明内の  $k$  の出現のそれぞれが  $\text{Hom}(M, N_0)$  の元と  $\text{Ker } f_{2*}$  の元のどちらの役割であるかを考えて, 前者の元であると判定されたものは  $\iota(k)$  に書き換えるのである. 書き換え後の (C) は一貫して  $\iota$  の性質を調べるように書かれ,  $k$  はあたかもそのための道具であるかのようになる<sup>\*48</sup> :

$\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_1)$  への包含写像を  $\iota$  と書く.  $\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取る.

$k$  は,  $\text{Ker } f_{2*}$  の定義によって,

$$f_{2*}(\iota(k)) = 0 \quad (\star)$$

をみたす. この式の左辺は  $f_{2*}$  の定義によって  $f_2 \circ (\iota(k))$  であり, 右辺は系 1.17 によって  $0_{N_2}^M$  であるから,  $\iota(k)$  は  $f_2 \circ (\iota(k)) = 0_{N_2}^M$  をみたす準同型写像である.

このとき, 補題 1.29 によって,  $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = \iota(k)$  をみたすものが存在することがわかる. 言い換えれば,  $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = \iota(k) \quad (\star\star)$$

をみたすものが存在する. このような  $\alpha$  を 1 つ選ぶ.

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったので, 上記の  $\alpha$  の選択は  $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_0)$  への写像  $Q$  で

$$f_{1*} \circ Q = \iota$$

をみたすものの存在を意味する. 補題 1.33 によって, この  $Q$  の存在から  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が従う.

冒頭, (☆) を境に (前節で (☆☆) を境に末尾にそうしたように)  $k$  の範囲を分割する.  $\text{Hom}(M, N_2)$  における等式 (☆) が  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元  $k$  について成り立つことは,  $\text{Ker } f_{2*}$

<sup>\*46</sup> 補題 1.30 が参照されないようにするために, 補題 1.33 の証明はそれを適用しない形で書かれている.

<sup>\*47</sup> ここでは, 論を平易に進めるために包含写像の概念を用いたが, これは定理 1.27 を分析する上で必要不可欠というわけではない. 第 5 章で除去される.

<sup>\*48</sup> (C) から補題 1.33 を切り出すために論理の説明に紙幅を割いたが, ある程度慣れている人ならむしろ, (C) を包含写像の性質を調べるストーリーに書き直そうとするだけで, 同じ補題にたどり着くものかもしれない.

から  $\text{Hom}(M, N_2)$  への写像の等式  $f_{2*} \circ \iota = 0$  の成立を意味する。 $f_{2*}$  でない一般の準同型写像でも成り立つ証明であるから、補題として分離できる：

### 補題 1.34

$Y_1, Y_2$  は加群であり、 $g_2$  は  $Y_1$  から  $Y_2$  への準同型写像であるとする。このとき、 $\text{Ker } g_2$  から  $Y_1$  への包含写像を  $j$  と書くと、次が成り立つ：

$$g_2 \circ j = 0_{Y_2}^{\text{Ker } g_2}.$$

証明。 $\text{Ker } g_2$  の元  $k$  を任意に取る。 $k$  は、 $\text{Ker } g_2$  の定義によって、 $g_2(j(k)) = 0$  をみたす。この式の左辺は  $(g_2 \circ j)(k)$  であるから、 $(g_2 \circ j)(k) = 0$ 。 $k$  は  $\text{Ker } g_2$  の任意の元だったから、これは  $g_2 \circ j = 0_{Y_2}^{\text{Ker } g_2}$  を示している。□

(C) の証明をこれを適用する形にさらに書き換えて、前節からここまで続いていた改良も、これで一区切りである。(A) や (B) も<sup>\*49</sup>含めた完全な証明の形で示して、この章の成果としよう。

## 1.8 改良された証明

前節までに得られた補題によって、定理 1.27 の証明は次のように書き直される：

定理 1.27 の証明。仮定された完全性によって、 $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$ ,  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_2 \subseteq \text{Im } f_1$  が成り立っている。これらの条件の下、 $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$  が完全列であることを示したい。そのためには、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ ,  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の 3 つの条件をそれぞれ示せば十分である(系 1.25)。

(A)  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  が成り立つこと：

$\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  に補題 1.26 (a) を適用して  $f_2 \circ f_1 = 0_{N_2}^{N_0}$ 。これによって、

$$(f_2 \circ f_1)_* = 0_{N_2*}^{N_0}$$

が得られる。この式の左辺は補題 1.28 によって  $f_{2*} \circ f_{1*}$  に等しい。その一方、右辺は補題 1.20 によって  $0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$  に等しい。

以上によって  $f_{2*} \circ f_{1*} = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Hom}(M, N_0)}$ 。これに補題 1.26 (b) を適用して、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  がわかる。

(B)  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$  が成り立つこと：

$\text{Ker } f_{1*}$  の元  $k$  を任意に取って固定する。 $k$  は  $\text{Ker } f_{1*}$  の定義によって、 $f_{1*}(k) = 0$  をみたす。この式の左辺は  $-_*$  の定義によって  $f_1 \circ k$  であり、右辺は系 1.17 によって  $0_{N_1}^M$  であるから、

$$f_1 \circ k = 0_{N_1}^M.$$

---

<sup>\*49</sup> (B) に対しても、(C) に対して施したのと同じような改良が可能である。ここまでそれをしていないのは、ずっと後の第 5 章までそれが活かされないから後回しにしているだけであり、特段の技術的困難は存在しない。

この式は、 $M$  の各元  $m$  に対してそのみたすべき条件  $f_1(k(m)) = 0$  を課す。これは  $k(m)$  が  $\text{Ker } f_1$  に属することを意味し、それと  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  を合わせると、 $k(m) = 0$  が従う。 $M$  の任意の元  $m$  に対してこれが成り立つことは、 $k = 0_{N_0}^M$  を意味する。これと系 1.17 によって、 $k = 0$ 。

$k$  は  $\text{Ker } f_{1*}$  の任意の元だったので、 $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ 。

(C)  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が成り立つこと：

$\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_1)$  への包含写像を  $\iota$  と書く。補題 1.34 によって  $f_{2*} \circ \iota = 0_{\text{Hom}(M, N_2)}^{\text{Ker } f_{2*}}$ 。

$\text{Ker } f_{2*}$  の元  $k$  を任意に取る。この  $k$  を上の式に代入して、 $f_{2*}(\iota(k)) = 0$  が成立する。この式の左辺は  $-_*$  の定義によって  $f_2 \circ (\iota(k))$  であり、右辺は系 1.17 によって  $0_{N_2}^M$  であるから、 $\iota(k)$  は  $f_2 \circ (\iota(k)) = 0_{N_2}^M$  をみたす準同型写像である。このとき、補題 1.29 によって、 $M$  から  $N_0$  へのある準同型写像  $\alpha$  で  $f_1 \circ \alpha = \iota(k)$  をみたすものが存在することがわかる。言い換えれば、 $\text{Hom}(M, N_0)$  のある元  $\alpha$  で

$$f_{1*}(\alpha) = \iota(k)$$

をみたすものが存在する。このような  $\alpha$  を 1 つ選ぶ。

$k$  は  $\text{Ker } f_{2*}$  の任意の元だったので、上記の選択は  $\text{Ker } f_{2*}$  から  $\text{Hom}(M, N_0)$  への写像  $Q$  で  $f_{1*} \circ Q = \iota$  をみたすものの存在を意味する。補題 1.33 によって、この  $Q$  の存在から  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  が従う。

以上によって  $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$ ,  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$ ,  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の 3 条件がすべて示されたので、系 1.25 の適用によって  $\{0\} \rightarrow \text{Hom}(M, N_0) \xrightarrow{f_{1*}} \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{f_{2*}} \text{Hom}(M, N_2)$  は完全列である。□

これ以上の改良は次章以降に譲ることにして、現時点の状況を整理しよう。証明を大きく 3 つのパートに分けることができるのであった。

- (A) まず、 $\text{Im } f_{1*} \subseteq \text{Ker } f_{2*}$  が成り立つことは、左完全列の性質である補題 1.26 と  $\text{Hom}$  の性質である補題 1.28 の適用によって、 $\text{Im } f_1 \subseteq \text{Ker } f_2$  から証明される。
- (B)  $\text{Ker } f_{1*} \subseteq \{0\}$  であることは、左完全列の性質と  $\text{Hom}$  の性質によって  $\text{Ker } f_1 \subseteq \{0\}$  から証明される。この証明は、ごく素朴に書かれたままである。
- (C)  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  の証明のうち、冒頭で  $f_{2*} \circ \iota = 0$  を導く部分と末尾で  $f_{1*} \circ Q = \iota$  なる  $Q$  の存在から  $\text{Ker } f_{2*} \subseteq \text{Im } f_{1*}$  を導く部分はそれぞれ補題 1.34 と補題 1.33 として分離されて証明本体からは見えなくなった。これらはどちらも左完全列の性質に関わる部分であった。残りの  $f_{2*} \circ \iota = 0$  から  $Q$  の存在を導く部分のうち、左完全列の性質に関わる一部は補題 1.29 として分離されたが、ほかの部分は未整理のまま残った。

第 2 章では、この未整理のまま残った部分に（応急的に補題 1.29 として切り出された部分も含めて）書き換えを施す。加群のテンソル積とそれに付属する  $\sharp$  と  $\flat$  という大掛かりな道具<sup>\*50</sup>を用いたこの書き換えによってこの部分は 3 つのステップに分解され、うち 2 つ（ステップ 1, 3）が  $\text{Hom}(M, -)$  の性質に由来するものとして、残り（ステップ 2）が完全列の性質（補題 1.29）に由来するものとして整理される。

続く第 3 章は、抽象化のための章である。 $\sharp$  と  $\flat$  のような構造は数学のあちこちに見られ、それらはすべて、随伴という抽象的な概念の具体例として理解できる。この稿では  $\sharp$  と  $\flat$  以外の具体例には触れないが<sup>\*51</sup>、第 2 章の時点では証明を書き換えるためのやや場当たり的な道具でしかなかった  $\sharp$  と  $\flat$  をこの章で随伴の 1 つの具体例として捉え直す。この抽象的な視点によって、我々は  $\text{Hom}$  の左完全性に限らない視野の広さを得る。

第 3 章の抽象化によって得られた視野の広さは、一見、証明の効率とトレードオフであるかのようである。そう見えるのは、 $\sharp$  と  $\flat$  を随伴の具体例と捉えて書き直された第 3 章の証明が、それ以前には不必要だった条件のチェックを要求するためである。第 4 章は、このチェックをパスするための機械的な証明を与える。そしてそれを抽象化することで、左随伴をもつためのまったく抽象的な条件が記述され、この抽象的な条件が第 2 章の時点でみたされていたことを確認する。つまり、この章の効果によって、抽象化は証明の効率を妨げなくなる。

第 5 章以降の章は、左完全列の性質に関わる。これらの章によって、今度は左完全列の性質が抽象化される。定理 1.27 の証明は並び替えられ、再び抽象化の恩恵を受ける（極限）。

そして随伴と極限によって抽象的に書き直された定理 1.27 は、最後に第 8 章でテンソル積の右完全性の証明を生む。

## ジョイント：第 2 章に向けて

第 2 章のために必要であり、この章のテーマに適合もしているが、しかしこの章の中では活用されない、そんな補題をここで準備しておこう。

例えば、自由生成加群は次章の冒頭（加群のテンソル積の定義）に必要な道具であるから、この章または次章冒頭で導入されなければならない。どちらが良いかと言えば、加群関係の諸々のあるこの章と一緒に置いた方が良さそうだが、しかし、この章ではまったく必要の無い概念である。そんなわけで、ここに置かれることになった。

---

<sup>\*50</sup> 「大掛かりな道具」というのは、それ無しにも証明しうる定理に対して大掛かりであるという意味である。とは言え、テンソル積と  $\sharp$  と  $\flat$  は、基礎的な道具であり決して特殊なものではない（ただし、 $\sharp$  と  $\flat$  という記号はこの稿独自のものである）。

<sup>\*51</sup> この稿は定理 1.27 に関係無いものには極力触れないという方針に沿って書かれている。厳密には、第 8 章が随伴のもう 1 つの具体例である（後述）。